

Mittelwerte und Mittelwertvergleiche durch Optimieren

von

Hans Schupp, Saarbrücken

Herrn Prof. Wolfgang Kroll zum 75. Geburtstag in Freundschaft gewidmet

Kurzfassung: Der Titel mag zunächst verwirren. Wer Mittelwerte bildet, orientiert sich zur Mitte hin, wer optimiert nach außen. Erstaunlicherweise gibt es jedoch zwischen diesen beiden Aktivitäten wechselseitig erhellende Bezüge. Das wird für 2 Ausgangsdaten kurz belegt und sodann auf 3 sowie auf 4 Daten erweitert. Die Verallgemeinerung auf n Daten liegt nahe; sie wird plausibel gemacht, aber nicht bewiesen. Abschließend folgt eine didaktische Bewertung der durchgeführten Tätigkeiten und erhaltenen Einsichten.

Abstract: The title may confuse. He who centralizes goes to the midth; who optimizes looks at the edges. But there are interesting, mutually elucidating relations between these two activities. We indicate them for 2 data and extend them for 3 and 4 data. The next step is a generalization on n data. Finally we give a didactical comment about aims and scope of our unit.

1 $n = 2$

Bekanntlich ist unter allen umfangsgleichen Rechtecken das Quadrat von maximalem Inhalt. Ein einfacher Beweis benutzt den direkten Vergleich.

Seien $a, b > 0$ mit $a > b$ die Seiten eines konkurrierenden Rechtecks und $\frac{a+b}{2}$ die Seite des isoperimetrischen Quadrats (Abb.1).

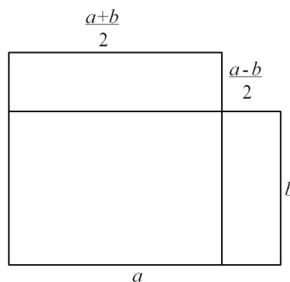


Abbildung 1

Dann ist das zum Quadrat gehörende obere Teilrechteck größer als das gleichbreite rechte Teilrechteck des Konkurrenten, weil seine Länge um $\frac{a-b}{2}$ größer ist, das Quadrat also größer als das Rechteck.

Demnach gilt $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ und schließlich

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1)$$

für alle nichtnegativen¹ reellen Zahlen a, b .

Das ist die bekannte Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel zweier solcher Zahlen.

2 $n = 3$

Nun sind Würfel und Quader zu vergleichen. Aber woraufhin und unter welcher Bedingung? Immerhin gibt es bei Quadern drei Maßangaben: Volumen, Oberflächeninhalt und Gesamtkantenlänge. Fragen wir erst einmal:

Welcher unter allen Quadern gleicher Gesamtkantenlänge k hat maximales Volumen?

Seien $a, b, c > 0$ die einzelnen Kantenlängen, also

$$k = 4 \cdot (a + b + c).$$

Ist die rechteckige Grundfläche des Quaders noch kein Quadrat, so kann sein Volumen vergrößert werden, nämlich dadurch, dass dieses Rechteck unter Wahrung seines Umfangs in ein Quadrat überführt wird. Dabei bleibt die Höhe des Quaders und somit auch k unverändert. Der größte Quader ist also unter denen mit quadratischer Grundfläche zu suchen.

Wenn wir nun wieder den Würfel als optimalen Quader vermuten, so setzen wir

$$f := \frac{k}{12}$$

für dessen Kantenlänge und entsprechend $f+u$ für die Grundseitenlänge sowie $f-2u$ für die Höhe eines konkurrierenden Quaders (denn den 8 Kanten von Grund- und Deckfläche stehen nur 4 Mantelkanten gegenüber). Zu zeigen ist dann

$$f^3 \geq (f+u)^2 \cdot (f-2u) \text{ bzw. } f^3 \geq f^3 - u^2 \cdot (3f+2u).$$

¹ Dass diese Ungleichung auch für $a = 0 \vee b = 0$ gilt, ist leicht einzusehen. Ebenso, dass Gleichheit gilt im Sonderfall $a = b$.

Diese Ungleichung gilt für alle $u \geq -\frac{3}{2}f$ und damit sicher für alle zugelassenen $u > -f$.

Es ist also tatsächlich

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$$

und damit

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (2)$$

für alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c .

Damit haben wir die klassische Mittelungleichung für $n=3$ wie im vorherigen Falle durch Optimieren bewiesen.² Nun gehen wir weiter:

Welcher unter allen Quadern gleicher Gesamtkantenlänge k hat maximalen Oberflächeninhalt?

Wiederum der Würfel? Erneut können wir uns dabei auf Quader mit quadratischer Grundfläche (und gleicher Höhe) beschränken, denn alle anderen lassen sich wie oben geschehen dazu vergrößern. Grund- und Deckfläche werden dabei größer, während der Mantelinhalt unverändert bleibt. Wir vermuten also:

$$6 \cdot f^2 \geq 2 \cdot (f+u)^2 + 4 \cdot (f+u) \cdot (f-2u) \text{ bzw. } 6 \cdot f^2 \geq 6 \cdot f^2 - 6 \cdot u^2,$$

was trivialerweise richtig ist. Demnach ist

$$6 \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq 2 \cdot (ab+bc+ca)$$

bzw.

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \quad (3)$$

für alle nichtnegativen reellen a, b, c .

Nun interessiert uns natürlich, wie dieser neue Term sich zum geometrischen Mittel verhält. Liegt er unterhalb dieses Mittels oder zwischen den klassischen Mitteln? Gehen wir also an die dritte Optimierung:

² Selbstverständlich gibt es in beiden Fällen noch zahlreiche andere, auch durchaus elementare Beweise, für die indessen auf die Literatur (s. etwa Schupp 1992 oder Engel 1998) verwiesen werden muss.

Welcher unter allen *Quadern* gleichen *Oberflächeninhalts* O hat *maximales Volumen* V ?

Dabei können wir nicht mehr den zweimal bewährten Weg des sukzessiven Optimierens beschreiten, weil sich beim Übergang von irgendeinem zum quadratischen Quader gleicher Gesamtkantenlänge sowohl O als auch V vergrößern.

Zu zeigen ist, wenn wir wieder den Würfel vermuten,

$$\left(\sqrt{\frac{2 \cdot (ab + bc + ca)}{6}} \right)^3 \geq abc$$

bzw.

$$\left(\frac{ab + bc + ca}{3} \right)^3 \geq a^2 b^2 c^2$$

oder auch

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} .$$

Das aber ist Ungleichung (2), angewandt auf die drei nichtnegativen reellen Zahlen ab, bc und ca . Demnach gilt:

$$\sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc} \tag{4}$$

für alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c .

Es ist uns offensichtlich gelungen, ein „mittleres Mittel“ zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel einzuschieben. Das geschah durch geeignetes Optimieren, direkt oder doch durch Rückgriff auf eine derart gewonnene Einsicht.

Beispiel: $a = 1, b = 2, c = 4$

arithm. Mittel: $\frac{7}{3} \approx 2,33$; mittl. Mittel: $\sqrt{\frac{14}{3}} \approx 2,16$; geom. Mittel: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Wie die beiden klassischen Mittel ist auch dieses dritte Mittel *symmetrisch*, d.h. invariant gegenüber allen Permutationen der beteiligten Zahlen. Alle drei sind außerdem *homogen*, d.h. durchgängige Multiplikation der Ausgangszahlen mit einem konstanten Faktor hat für sie die gleiche Wirkung.

3 $n = 4$

Dass wir in 2 ein weiteres Mittel erhalten konnten, hängt offenbar damit zusammen, dass wir es beim Optimieren mit einem dreidimensionalen Gebilde zu tun hatten, an welchem drei verschiedene Maßtypen auftreten. Das legt die Frage nahe,

welche Mittel und Mittelbeziehungen wir bekommen, wenn wir von einem vierdimensionalen Quader (wir wollen ihn kurz *Quarter* nennen) ausgehen.

Dazu müssen wir allerdings erst einmal wissen, wie er aussieht. Erinnern wir uns einfach, wie wir die entsprechenden niedrigdimensionalen Gebilde bekommen haben. Am Anfang ist der Punkt (eine spätere Ecke). Ihn verschieben wir auf einer Geraden und erhalten einen zweiten Punkt samt Zwischenstrecke (eine spätere Kante). Diese Strecke verschieben wir senkrecht zu ihr und erhalten eine zweite Strecke samt Zwischenrechteck (eine spätere Teilfläche). Dieses Rechteck verschieben wir erneut, diesmal im Raum und wiederum senkrecht zur bisherigen Punktmenge, und erhalten so ein zweites Rechteck samt Zwischenkörper, also einen Quader. Konsequenterweise verschieben wir nun diesen Quader senkrecht zu ihm, in der vierten Dimension, und bekommen einen neuen Quader samt vierdimensionalem Zwischengebilde, unseren Quarter.

Kann man sich das noch vorstellen? Durchaus, wenn wir beachten, wie wir uns geholfen haben, als wir den dreidimensionalen Quader auf dem zweidimensionalen Zeichenblatt darstellen mussten. Wir haben einfach die dritte, die Zeichenebene eigentlich querende Dimension durch Parallelprojektion in sie hineinverlagert. Genau dies machen wir nun auch mit der vierten Dimension und gelangen so zu Abb.2.

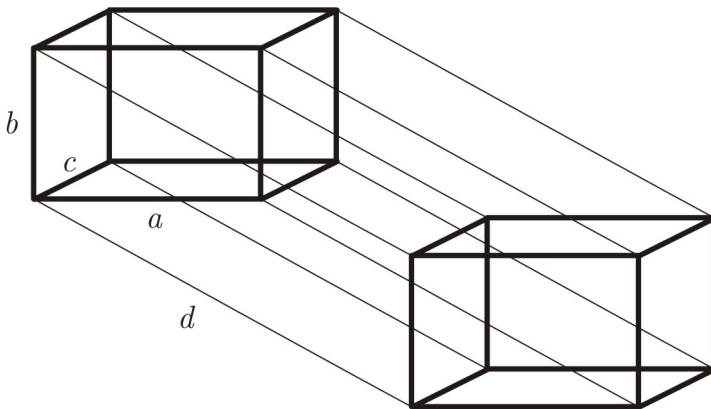


Abbildung 2

Es liegt nahe, diesem Quarter das *Volumen*

$$V = abcd$$

zu geben.

Die *Gesamtkantenlänge* beträgt

$$k = 8 \cdot (a + b + c + d);$$

denn wir haben insgesamt 32 Kanten ($2 \cdot 12$ Kanten an den beiden Quadern und 8 Verbindungskanten), von denen je 8 parallel und gleichlang sind. Es liegen 24 Flächen vor, nämlich je 6 an den beiden Quadern und nochmals 12, die von je einer Kante, ihrer Bildkante und den beiden zugehörigen Verschiebungsstrecken gebildet werden. Hierbei sind je 4 Flächen parallel, kongruent und damit inhaltsgleich. Demnach ist der *Flächeninhalt*³ des Quarters

$$F = 4 \cdot (ab + bc + cd + da + ac + bd).$$

Schließlich treten in ihm 8 Körper auf, nämlich der Ausgangsquader und sein Bild sowie diejenigen 6, die zwischen einer Seite des Ausgangsquaders und dessen Bildseite liegen. Von ihnen sind je zwei (nämlich diejenigen zwischen parallelen Ausgangsseiten) parallel, kongruent und inhaltsgleich (für ein Beispiel s. Abb.3).

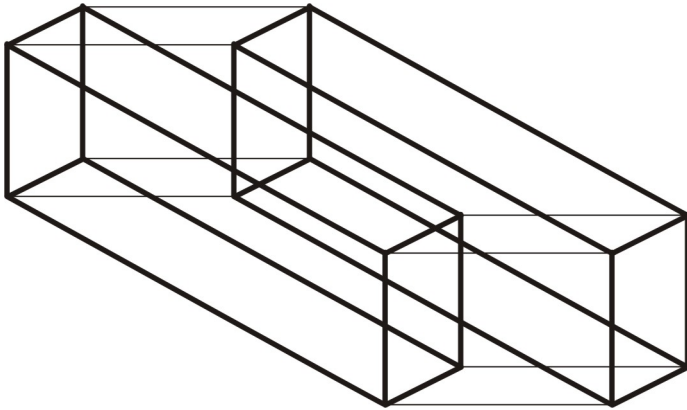


Abbildung 3

Der *Körperinhalt* des Quarters beträgt also

$$K = 2 \cdot (abc + bcd + cda + dab).$$

Mittels Analogieschluss vermuten wir, dass auch jetzt unter allen Quatern mit gleicher Gesamtkantenlänge der regelmäßige (alle Kantenlängen gleich) maximales Volumen hat. Zum Beweis gehen wir vor wie bei $n = 3$ und unter Ausnutzung der dortigen Ergebnisse. Der optimale Quarter ist jedenfalls unter denjenigen zu suchen, bei denen der Grundkörper ein Würfel ist. Denn sonst könnte man ihn ja

³ Die hier gewählten Bezeichnungen für die vier am Quarter auftretenden Maße sind einigermäßen willkürlich. Man sollte vielleicht eher vom *ein-*, *zwei-*, *drei-* und *vierdimensionalen* Maß reden.

durch Gleichmachen seiner Kanten bei Wahrung seiner und damit des Quarters Kantenlängensumme vergrößern. Deshalb brauchen wir den regelmäßigen Quarter (Kantenlänge $f = \frac{k}{32}$) nur zu vergleichen mit demjenigen, der einen Grundkörper hat mit der *Kantenlänge* $f + u$ und eine Höhe $f - 3u$ (wegen 24 Kanten an Grund- und Deckkörper gegenüber nur 8 Höhenkanten). Nun ist

$$f^4 \geq (f+u)^3 \cdot (f-3u) \text{ äquivalent zu } f^4 \geq f^4 - u^2 \cdot (3u^2 + 8fu + 6f^2),$$

was für alle u zutrifft, weil der Klammerterm durchweg positiv ist, wie man leicht nachrechnet. Es ist also

$$\left(\frac{8 \cdot (a+b+c+d)}{32} \right)^4 \geq abcd$$

oder anders

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \quad (5)$$

für alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c, d .

Wir haben die klassische Mittelungleichung nun auch im Falle $n = 4$ bewiesen.⁴

Welcher unter allen Quatern derselben Gesamtkantenlänge hat maximalen Flächeninhalt? Vermuten wir wieder den regelmäßigen Quarter und gehen wir vor wie eben, so haben wir $24f^2$ mit $12 \cdot (f+u)^2 + 12(f+u) \cdot (f-3u)$ zu vergleichen. Der zweite Term vereinfacht sich zu $24f^2 - 24u^2$, womit der Beweis schon erbracht ist. Damit ist

$$24 \cdot \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2 \geq 4 \cdot (ab+bc+cd+da+ac+bc)$$

oder auch

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+cd+da+ac+bd}{6}} \quad (6)$$

Bleibt noch die Suche nach dem körperinhaltsgrößen Quarter unter denen mit gleicher Gesamtkantenlänge. Bei analoger Vermutung und Vorgehensweise ist nun zu zeigen

$$8 \cdot f^3 \geq 2 \cdot (f+u)^3 + 6 \cdot (f+u)^2 \cdot (f-3u),$$

was äquivalent ist zur wegen $u \geq -f$ wahren Aussage

⁴ Üblicherweise beweist man sie durch Hintereinanderschalten der Ungleichung für $n = 2$ (s. Schupp 1992).

$$8 \cdot f^3 \geq 8 \cdot f^3 - 4u^2 \cdot (6f + 4u).$$

Also ist

$$8 \cdot \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^3 \geq 2 \cdot (abc + bcd + cda + dab)$$

und schließlich

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \quad (7)$$

Nun möchten wir natürlich gerne auch noch nachweisen, dass die beiden neuen Terme in (6) und (7) größer sind als das geometrische Mittel von a, b, c, d . In einem Falle gelingt uns das relativ leicht:

$$\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dac}{4}} \geq \sqrt[4]{abcd} \quad (8)$$

Denn (8) lässt sich äquivalent umformen zu

$$\frac{abc + bcd + cda + dab}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot bcd \cdot cda \cdot dac}$$

und das ist durch (5) gesichert. Hingegen ist

$$\sqrt{\frac{ab + bc + cd + da + ac + bd}{6}} \geq \sqrt[4]{abcd} \quad (9)$$

schon schwieriger zu beweisen.

Benutzen wir die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel für $n=6$ (sie lässt sich leicht nachweisen, indem wir diejenigen für $n=2$ und $n=3$ hintereinanderschalten), so gilt jedenfalls

$$\frac{ab + bc + cd + da + ac + bd}{6} \geq \sqrt[6]{a^3 b^3 c^3 d^3} = \sqrt{abcd}$$

und daraus folgt (9) durch Ziehen der Quadratwurzel.

Damit haben wir tatsächlich zwei Zwischenmittel zum arithmetischen und geometrischen Mittel von vier Zahlen gefunden. Die Bezeichnung „Mittel“ ist auch insofern berechtigt, als beide Terme wie ihre Schranken zwischen $\min(a, b, c, d)$ und $\max(a, b, c, d)$ liegen. Außerdem sind sie wie diese symmetrisch und homogen.⁵

⁵ Die Forderung nach Symmetrie und Homogenität von Mittelwerten wird allerdings nicht von allen Autoren erhoben (vgl. Wassell 2002 bzw. Hischer; Lambert 2004b). Bei unse-

Wie die bisher nummerierten Ungleichungen stehen auch **(8)** und **(9)** für geometrische Optimierungen, diesmal am Quarter.

Denn **(8)** ist äquivalent zu

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2 \cdot (abc + bcd + cda + dab)}{8}} \right)^4 \geq abcd$$

und dies heißt, dass unter allen Quatern mit gleichem Körperinhalt der regelmäßige größte Volumen hat. Gleichermäßen ist **(9)** äquivalent zu

$$\left(\sqrt{\frac{4 \cdot (ab + bc + cd + da + ac + bd)}{24}} \right)^4 \geq abcd ,$$

wonach unter allen Quatern mit gleichem Flächeninhalt der regelmäßige größte Volumen hat. Allerdings hatten wir im Rahmen dieser letzten beiden Argumentationen erst die Ungleichungen und dann die Optimierungen erhalten. Indessen wiederum gingen diese Ungleichungen letztlich aus früheren Optimierungen hervor.

4 Verallgemeinerung

Fassen wir unsere Ergebnisse aus **3** zusammen:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+cd+da+ac+bd}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}} \geq \sqrt[4]{abcd} \quad (10)$$

Beispiel $a=1; b=1; c=2; d=8$: $3 \geq 2,48 \geq 2,19 \geq 2$

Allerdings ist die mittlere Ungleichung noch nicht gesichert. Trotzdem sind wir überzeugt, dass sie stimmt, und nicht nur durch solche Beispiele. Warum? Zunächst, weil der Wurzelexponent sich von Term zu Term um 1 erhöht, beginnend mit 1 und endend mit 4. Sodann aber auch der Radikanden wegen. Im vierten Term haben wir das Viererprodukt von a, b, c, d im dritten die Summe aller möglichen Dreierprodukte aus ihnen, im zweiten die Summe aller möglichen Zweierprodukte, und im ersten Term die Summe der Zahlen selbst. Im Nenner steht jeweils die Anzahl der Summanden, so dass der Radikand deren arithmetisches Mittel ist.

In **2** erhielten wir

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$$

rem Ansatz sind sie auch geometrisch verständlich, entsprechen sie doch Kongruenz- und Ähnlichkeitseigenschaften der beteiligten Körper.

und sehen einen analogen Aufbau. Auch **(1)** passt dazu. Mühelos könnten wir die analoge Kette für 5 nichtnegative reelle Zahlen hinschreiben. Sie hätte drei Glieder zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel. Und für irgend n Zahlen macht nur das Aufschreiben Mühe, nicht jedoch die plausible Gesetzlichkeit der Kette.

Deshalb geben wir zunächst einige Definitionen und Schreibweisen vor und formulieren dann die allgemeine Vermutung.

Deuten wir die Zähler unserer Radikanden als Funktionen der dortigen Variablen, so kann man sie, wie wir schon wissen, *symmetrisch* nennen, weil der Funktionswert sich bei keiner Variablenpermutation ändert. Aber damit nicht genug: Haben wir n Variablen, so tritt weiterhin in einem bestimmten Term als Zähler eine Summe auf mit genau denjenigen Summanden, die sich ergeben, wenn jeweils k der n Variablen zu Produkten zusammengefasst werden. Solche Funktionen heißen *symmetrische Grundfunktionen*⁶. Genauer heißt diejenige Funktion bei n Variablen, die jeweils k von ihnen als Produkte zusammenfasst und addiert, die *k -te symmetrische Grundfunktion vom Grade n* . Zeichen: $g_{k,n}$.

Beispiel: In **(10)** treten nacheinander $g_{1,4}$ bis $g_{4,4}$ auf.

Im Nenner steht die jeweilige Anzahl der Summanden. Bekanntlich gibt es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Möglichkeiten, aus n Elementen k auszuwählen. Berücksichtigen wir dann noch, dass im k -ten Glied unserer Kette die k -te Wurzel gezogen wird, so können wir sie bei n Variablen folgendermaßen schreiben:

$$\frac{g_{1,n}}{n} \geq \sqrt{\frac{g_{2,n}}{\binom{n}{2}}} \geq \dots \geq \sqrt[k]{\frac{g_{k,n}}{\binom{n}{k}}} \geq \sqrt[k+1]{\frac{g_{k+1,n}}{\binom{n}{k+1}}} \geq \dots \geq \sqrt[n]{g_{n,n}} .$$

Setzen wir für den (k,n) -ten Radikanden, also für das arithmetische Mittel der Summanden in der k -ten symmetrischen Grundfunktion vom Grade n , kurz $h_{k,n}$, so vereinfacht sich **(10)** zu:

$$h_{1,n} \geq \sqrt{h_{2,n}} \geq \dots \geq \sqrt[k]{h_{k,n}} \geq \sqrt[k+1]{h_{k+1,n}} \geq \dots \geq \sqrt[n]{h_{n,n}} \quad \textbf{(11)}$$

Die unbewiesene mittlere Ungleichung von **(10)** steckt hierin als $\sqrt{h_{2,4}} \geq \sqrt[3]{h_{3,4}}$.

⁶ Sie heißen so, weil sich alle symmetrischen Funktionen aus ihnen in bestimmter Weise ergeben. In unseren Zusammenhang ist dies nicht wichtig.

Für unterschiedliche Beweise von **(11)** sei auf Spezialliteratur verwiesen (s. etwa Beckenbach; Bellmann 1961, oder Bullen 2003 ab Seite 321 für elementare, aber dennoch höchst technische Beweise und deren lange Historie) .

Man mache sich klar, dass in **(11)** auch die *allgemeine Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel* steckt. Zwischen ihnen liegen $n-2$ weitere Mittelwerte. Alle n Mittelwerte sind *symmetrisch* und *homogen*.

Weiter sei darauf verwiesen (ohne exakten Nachweis), dass jede Ungleichung

$$\sqrt[k]{h_{k,n}} \geq \sqrt[k+1]{h_{k+1,n}}$$

ein Optimierungsproblem am n -dimensionalen Quader löst, nämlich dass unter all denjenigen von ihnen, die gleiches k -dimensionales Maß haben, der regelmäßige Quader (der n -dimensionale Würfel) maximales $(k+1)$ -dimensionales Maß hat.

Wir beschränken uns wieder auf $n=4$ und $k=2$:

$$\sqrt{\frac{ab+bc+cd+da+ac+bd}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}$$

ist äquivalent zu

$$8 \cdot \left(\sqrt{\frac{4(ab+bc+cd+da+ac+bd)}{24}} \right)^3 \geq 2 \cdot (abc+bcd+cda+dab)$$

und dies heißt, dass unter allen Quartern mit demselben Flächeninhalt der regelmäßige den größten Körperinhalt hat.

Schließlich erinnern wir uns, dass in **(10)** *jede* einzelne Ungleichung innerhalb der dortigen Kette für ein gelöstes Maximumproblem stand. Auf **(11)** bezogen heißt dies:⁷

Sei $1 \leq k < l \leq n$. Dann gilt: Unter allen n -dimensionalen Quadern, die gleiches k -dimensionales Maß haben, hat der n -dimensionale Würfel maximales l -dimensionales Maß.

5 Didaktische Bemerkungen

Was in **1** geschieht, lässt sich zweifach in den üblichen Unterricht einbetten. Einmal in die zahlreichen elementaren Lösungen des isoperimetrischen Problems für Rechtecke (s. Schupp 1992), wobei dem hier angeführten quantitativen Vergleich von Quadrat und Rechteck der entsprechende bloß qualitative Vergleich (ohne

⁷ Diese geometrische Interpretation der hier diskutierten Ungleichungskette findet sich erstmals wohl bei Jecklin 1948 (vgl. Bullen 2003, S. 330).

Verwendung von Variablen) vorangehen sollte. Zum anderen in die ebenfalls mannigfachen Beweise der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel im einfachsten Falle zweier nichtnegativer reeller Zahlen. Neu ist nur, dass die Optimierung direkt in die Ungleichung umgesetzt werden kann. Damit aber ist schon die Strategie für alle weiteren Untersuchungen gegeben.⁸ Was sich nun noch wesentlich ändert, ist nur die Dimension. Dimensionsvariationen sind im gegenwärtigen Mathematikunterricht noch ziemlich selten, haben aber ein hohes didaktisches Potenzial (s. Schupp 2002). Die anderen Beweise für das isoperimetrische Problem bei Rechtecken lassen sich nicht in dieser Weise erweitern.

Das entsprechende Problem beim Quader (s. 2) muss allererst gefasst werden. Es stellt sich heraus, dass es gleich drei solche Probleme gibt, weil sich als „Perimeter“ sowohl das Kanten- als auch das Flächenmaß anbietet und weil auch diese Maße untereinander verglichen werden müssen. Erfreulicherweise klären sich zwei Probleme durch Rückgriff auf $n = 2$ bzw. auf die dortige Strategie und das dritte unter Verwendung bereits einer dieser beiden Lösungen. Man beachte, dass sich keines der drei Ergebnisse mit üblichen Mitteln der Schulanalyse erschließt, weil mehr als zwei Variablen auftreten und nur eine Bedingung für sie existiert.⁹ Für die höheren Dimensionen gilt dies natürlich erst recht.

Die drei Probleme führen nicht nur zu drei Ungleichungen, sondern auch zu drei Termen. Von denen sind zwei nicht weiter verwunderlich, entsprechen sie doch den beiden Termen im ebenen Falle. Anders der dritte Term, der offensichtlich ein neuartiges Mittel zwischen den beiden klassischen bildet.

Nun haben wir den Fuß in der Tür; spätestens jetzt tut sich ein kleines Forschungsfeld auf.¹⁰ Was passiert, wenn wir noch eine Dimension hinzunehmen? Die Antwort steht in 3. Es wurde deutlich, dass alle dortigen Ergebnisse mit den zuvor erworbenen Kenntnissen und Prozeduren erreichbar sind; es werden lediglich Techniken gebraucht, wie sie am Ende der Sek I vorliegen sollten. En passant erwirbt

⁸ Allerdings haben wir in 4 die Argumentationsrichtung umgekehrt. Dort schließen wir von den Ungleichungen auf die Optimierungsaussagen. Das geschah in Einzelfällen auch schon zuvor, war aber dort insofern „nahe liegend“, als die notwendigen Ungleichungen ihrerseits durch Optimieren direkt oder indirekt gewonnen worden waren. Erarbeitete Einsichten bei der Weiterarbeit zu benutzen, ist eine heuristische Basisstrategie und sorgt für kumulierendes Lernen.

⁹ Selbstverständlich kann man die hier entwickelten Ungleichungen auch voranstellen und mit ihnen dann optimieren. Wie man sie elementar beweist, lässt sich in Schupp 1980 oder in Engel 1998 nachlesen.

¹⁰ Dass dieses Feld fachwissenschaftlich längst und erschöpfend behandelt ist (s. Beckenbach; Bellmann 1961 und Bullen 2003) tut dem schulischen Vorhaben keinen Abbruch. Wichtiger ist, dass dieses mit dem neuerwachten Interesse für Mittelwerte (s. Hischer; Lambert 2004a) zusammen fällt.

man noch erste Einsichten in die Natur eines einfachen vierdimensionalen Körpers und damit in Grundzüge der vierdimensionalen Geometrie.

Überhaupt ist unser Thema gekennzeichnet durch ein Miteinander geometrischer und algebraischer Überlegungen (siehe dazu auch Lambert; Herget 2004), wie sie sonst meist separiert gelehrt und gelernt werden. Es kommt hinzu, dass sie frühere Betätigungen (geometrische Kombinatorik, planimetrische und stereometrische Berechnungen, geometrische Darstellungen, Termumformungen) wieder aufnehmen, aber in einen neuen, herausfordernden Kontext (Ungleichungen, Optimierungen, Dimensionserweiterungen) stellen. Es besteht die Chance, dass damals entstandene und seitdem verbliebene Defizite (z.B. bei den Inhaltsformeln, s. dazu Dahlke 2000) ausgemacht und beseitigt werden können. Nachhaltigkeit, neuerdings in aller Munde, setzt Stimmigkeit voraus.

Die Ungleichungskette **(10)** enthält eine störende Beweislücke. Dass man sie unterrichtlich nicht schließen kann, sollte nicht als Nachteil angesehen werden. Die Mathematik ist wohl das einzige Schulfach, in dem üblicherweise alle auftretenden Fachprobleme gelöst werden. Muss man sich da wundern, wenn sie von Laien als Disziplin angesehen wird, die keine echten Probleme mehr hat? Wir schulden unsern Schülern ein charakteristisches Bild einer jeden Wissenschaft, die wir vor ihnen vertreten. Dass sie – auch in der Mathematik – zuweilen unlösbaren, noch nicht gelösten oder von ihnen momentan nicht lösbaren Fragestellungen begegnen, gehört dazu.

Ungeachtet dieser Lücke weist **(10)** über sich hinaus, d.h. sie drängt zu einer weiterführenden bzw. verallgemeinernden Vermutung, vielleicht zunächst für $n = 5$, sodann aber für eine allgemeine Datenzahl. Hierbei erweist sich aber das Aufschreiben immer mehr als Hemmnis, welches sich auch durch den Übergang von $a, b, c \dots$ zu $a_1, a_2, a_3 \dots$ nicht beseitigen lässt.

Man kann an dieser Stelle abbrechen. Es genügt völlig, wenn man die Struktur solcher Ungleichungsketten durchschaut hat und von dort aus plausible Folgerungen treffen kann in bezug auf die einschlägigen Optimierungen.

Man kann aber die in **4** angegebenen Definitionen und Schreibweisen sowie die damit mögliche günstige Formulierung der allgemeinen Einsichten durchaus auch vorstellen, im Lehrervortrag oder als Lesestück. Nach den zahlreichen sinnvollen und konstruktiven Schüleraktivitäten zuvor ist eine solche Instruktionsphase durchaus angemessen, zumal sie exemplarisch zeigt, wie man eine sperrige Materie begrifflich und nomenklatorisch ordnen kann.

Was insgesamt – und unabhängig von dieser Entscheidung – in konsequenter Abfolge erarbeitet wurde, ist ein kleines, aber wohlabgerundetes und durchaus typisches Stück Mathematik. Eine Lerngruppe, die es sich in Linienführung und Detailarbeit grobenteils selbstständig verschafft hat (was natürlich Lehrhilfen nicht

ausschließt), kann sich schmeicheln, wirklich einmal Mathematik betrieben zu haben, d.h. schöpferisch in dieser so oft als stumpfsinnig verkannten (und meist nur auf ausgetretenen Pfaden durchwanderten) Disziplin tätig gewesen zu sein.

Die erhaltenen Ergebnisse sind geometrisch und algebraisch reizvoll und ästhetisch hochbefriedigend.¹¹ Dass sie nicht unmittelbar nützlich sind, ist kein Nachteil. Wir müssen darauf achten, dass die Mathematik auch und nicht zuletzt als „geistige Schöpfung, als deduktiv geordnete Welt eigener Art“ (s. Winter 1995) tradiert wird. Übrigens: Mathematik, die sich erschöpft im bloßen Hintereinander gleichartiger Aufgaben, ist weder schön noch nützlich, sondern trostlos.

Literatur

- Beckenbach, E.; Bellmann, R. (1961): *Inequalities*. New York: Springer
- Bullen, P.S. (2003): *Handbook of means and their Inequalities*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer
- Dahlke, E. (2000): Identifikationsfehler und Lösungsstrategien bei Umfang und Flächeninhalt sowie bei Oberflächeninhalt und Volumen. In: *mathematica didactica* 23, H. 2, S. 3–24
- Engel, A. (1998): *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer
- Hischer, H.; Lambert, A. (2004a) (Hrsg.): *Mittelwerte und weitere Mitten*. *Der Mathematikunterricht* 50, H. 4
- Hischer, H.; Lambert, A. (2004b): Zur Axiomatisierung von Mittelwerten unter Berücksichtigung der historischen Begriffsentwicklungen. In: *Der Mathematikunterricht* 50, H. 4, S. 67–78
- Jecklin, H. (1948): Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerte. *Elemente der Mathematik* 3, S. 61–63
- Lambert, A.; Herget, W. (2004): Mächtig viel Mittelmaß in Mittelwertfamilien. In: *Der Mathematikunterricht* 50, H. 4, S. 55–66
- Schupp, H. (1992): *Optimieren*. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag
- Schupp, H. (1994): Optimieren ist fundamental. In: *mathematik lehren* 81, S. 4–10
- Schupp, H. (2002): *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker
- Wassell, S. (2002): Rediscovering a Family of Means. In: *The mathematical intelligencer* 24, H. 2, S. 58–65

¹¹ Wir können die denkökonomische Komponente dieser Ästhetik noch dadurch erweitern, dass wir mit jedem Maximumproblem auch das dazu duale Minimumproblem formulieren und lösen, indem wir es auf das Maximumproblem zurückführen. Wäre das Quadrat unter allen inhaltsgleichen Rechtecken nicht dasjenige mit minimalem Umfang, so könnte man das nichtquadratische Rechteck mit kleinerem Umfang durch zentrische Streckung mit Faktor > 1 zu einem Rechteck vergrößern, das gleichen Umfang wie das Quadrat hätte, aber größeren Inhalt, dies im Widerspruch zu dessen Maximaleigenschaft. Entsprechend lässt sich bei allen unseren weiteren Maximumproblemen verfahren. Da dies jedoch für unseren Ansatz ohne Belang ist, sind wir nicht näher darauf eingegangen.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61, S. 37–46

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Hans Schupp
Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
schupp@math.uni-sb.de

Eingang Manuskript: 13.05.2007 (überarbeitetes Manuskript: 10.12.2007)