

Ein dynamischer Zugang zu „einfachen“ algebraischen Kurven

von

Heinz Schumann, Weingarten

Zusammenfassung: Das Desiderat „Algebraische Kurven“ hat trotz seiner geringen Lehrplanrelevanz immer schon eine methodisch-didaktische Pflege erfahren, die in diesem Beitrag unter Berücksichtigung der Weiterentwicklung von Dynamischen Geometriesystemen (Cabri II+) und im Hinblick auf außerplanmäßigen und projektartigen Mathematikunterricht fortgesetzt werden soll.

Summary: Despite its low relevance for teaching the desideratum „Algebraic curves“ has always been an issue within mathematical didactics. This article aims to continue this tradition by applying current dynamic geometry software (Cabri II+) and with respect to a project oriented mathematics instruction.

Didaktische Theorie und Praxis des computerunterstützten Mathematikunterrichts ist stets ein Reflex auf den jeweilig als Nonplusultra gepriesenen Software-Entwicklungsstand.

H. Schumann, 1996

1 Einleitung

Angesichts der zeitlichen und damit inhaltlichen Reduktion der mathematischen Bildung im gymnasialen Bereich von 9 auf 8 Schuljahre und der Einführung so genannter mathematischer Bildungsstandards als auch Kerncurricula ist es problematisch, einen Unterrichtsgegenstand zu propagieren, der zwar immer schon eine gewisse methodisch-didaktische Traditionspflege erfahren, aber in den Lehrplänen eigentlich keine Berücksichtigung gefunden hat.

Das Thema „Algebraische Kurven“ kann für einen allgemein bildenden Unterricht im Hinblick auf Projektarbeit, Facharbeiten, Arbeitsgemeinschaften und Begabtenförderung unter dem Eindruck weiterentwickelter adäquater Computerwerkzeuge neu bewertet werden. Dabei gelten nach wie vor die bei Schumann 1991, Weth 1993, Schupp u. Dabrock 1995 u.a.m. im Zusammenhang mit dem Computereinsatz angeführten Argumente, die wir hier schlagwortartig wiederholen. Für eine Behandlung algebraischer Kurven sprechen:

- ihre Brückenfunktion zwischen (synthetischer) Geometrie und Algebra
- ihre Problemhaftigkeit, Bearbeitungsvielfalt und Beziehungshaltigkeit

- ihr verallgemeinernder und weiterführender Charakter
- ihre Anwendungs- und Modellierungsfunktion
- ihre Verstärkungsfunktion für das funktionale und operative Denken
- ihre mathematikgeschichtliche Bedeutung
- ihr ästhetischer Reiz.

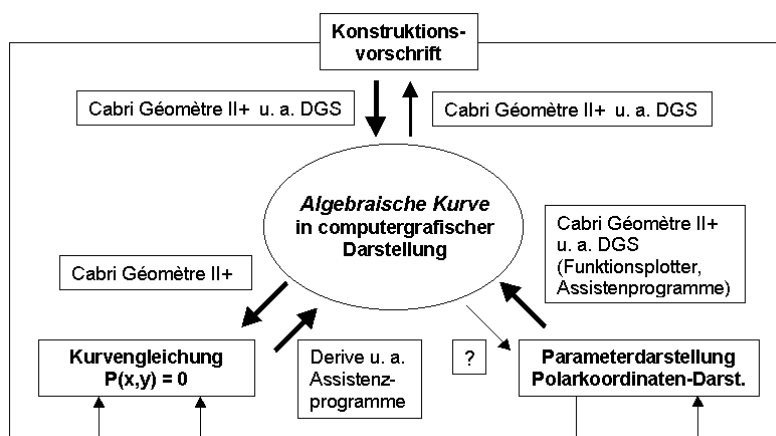
Computerwerkzeuge sind ausgezeichnete Explorations- und Rekonstruktionsmedien, mit denen wir uns den Gegenstand „Algebraische Kurven“ zugänglich machen können. Deshalb betrachten wir algebraische Kurven im Kontext ihrer Behandlung mittels entsprechender Computerwerkzeuge, die auch für den Unterricht verfügbar sind. Dabei beschränken wir uns im Wesentlichen auf Werkzeuge die – wegen ihrer temporären Nutzung durch Novizen – menüsteuerbar sein müssen und schließen deswegen kommandogetriebene Werkzeuge aus. Natürlich sind entsprechende mathematische Vorkenntnisse Voraussetzung, um eine computerunterstützte Behandlung erfolgreich durchführen zu können.

Algebraische Kurven haben folgende wesentliche Repräsentationsformen: Eine algebraische Kurve ist die Nullstellenmenge eines Polynoms in x und y :

$$\left\{ (x; y) \mid \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l a_{ij} x^i y^j = 0 \right\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \quad \text{mit } a_{ij} \in \mathbb{R};$$

$n = (k + l)$ mit $a_{kl} \neq 0$ ist der Grad der algebraischen Kurve. Diese algebraische Gleichung ist ein Objekt der Algebra; die zugehörige grafische Darstellung (Graph) ist ein Objekt der synthetischen Geometrie.

Unsere methodisch-didaktischen Überlegungen rahmen wir durch das folgende Diagramm (Schumann 2001), anhand dessen wir die derzeitigen Darstellungs- und Interaktionsmöglichkeiten mittels verfügbarer Computerwerkzeuge erläutern.



Die Pfeile im Diagramm besitzen folgende Bedeutung:

- ↓ Die „klassischen“ algebraischen Kurven sind mit Zirkel- und Linealkonstruktionen grafisch erzeugbar; dabei besitzen diese Konstruktionen höchstens zwei form- bzw. lagebestimmende Parameter. Mittels Dynamischer Geometriesysteme (DGS) kann die punktweise Erzeugung durch den „Spurmodus“ veranschaulicht werden, der die Punktmengenauffassung von Kurven unterstützt (vgl. u.a. Schumann 1991). Für die dynamische Variation der Parameterwerte (etwa zur Untersuchung von Fallunterscheidungen und zur Erzeugung von Kurvenscharen) ist aber ihre Erzeugung als Objekt und nicht nur als Bildschirmzustand erforderlich. Die entsprechende Grafik wird aus Stützpunkten (natürlich nur mit in der Systemarithmetik gerundeten Koordinaten) dynamisch interpoliert. Oft existieren für solche Kurven verschiedene geometrische Konstruktionsvorschriften bzw. -verfahren für ihre Erzeugung. Man kann unterscheiden zwischen der Erzeugung als Lotfußpunktkurve, Gleitpunktkurve, Kissoide, Konchoide, Rollkurve, Bildkurve bei besonderen Abbildungen usw. (die Hüllkurven-Erzeugung, etwa die durch Geraden, schließen wir hier aus).
- ↑ Umgekehrt kann aus so erzeugten grafischen Kurven mit Hilfe der Option „Konstruktionswiederholung“ die jeweilige Konstruktionsvorschrift nachträglich offen gelegt werden.
- ↙ Beim jetzigen Stand der gängigen DGS (Cabri Géomètre II, Cinderella, DynaGeo, Geone_{xt}, The Geometer's Sketchpad, Zirkel und Lineal) gestattet nur Cabri Géomètre II+ (www.cabri.com)¹ die betreffende Brücke zur Algebra zu schlagen, nämlich die Darstellung einer algebraischen Kurve als Nullstellenmenge eines Polynoms in x und y in einem relativ zu wählenden Koordinatensystem zu bestimmen. Dazu benutzt Cabri Géomètre II+ einen numerischen Algorithmus, der für algebraische Kurven $P(x; y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l a_{ij} x^i y^j = 0$ etwa bis zum Grad 8 zufriedenstellende Ergebnisse liefert. (Der Algorithmus lässt sich grob folgendermaßen beschreiben: Zufallsbestimmte Auswahl von ca. 100 Stützpunkten der erzeugten Kurve, aus denen mittels eines entsprechenden Gleichungssystems die $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Koeffizienten von $P(x; y) = 0$ vom Grad n , beginnend mit $n = 1$, bestimmt werden, bis die Punktproben für die restlichen der ausgewählten Punkte „näherungsweise“ Nullstellen ergeben.)
- ↗ Ein visueller Test für die Richtigkeit der ausgegebenen algebraischen Kurve kann mit einem mathematischen Assistenzprogramm oder Funktionenplotter, das implizite Funktionen plotten kann, erfolgen. Unter den menüsteuerbaren Assistenzprogrammen verfügt auch DERIVE über eine solche Option.

¹ Cabri II+ mit einer deutschsprachigen Oberfläche wird 2003 erscheinen.

- ↖ Natürlich ist es möglich, mittels geeigneter Funktionsplotter, die für sich allein stehen oder die Bestandteil von Assistenzprogrammen sind, aus einer Parameterdarstellung oder einer Polarkoordinaten-Darstellung auf statische Weise eine (algebraische) Kurve grafisch ad hoc darzustellen. Einsichtsvoll gegenüber einer solchen Black-Box-Generierung ist aber die dynamische Erzeugung der Kurvengrafik mittels DGS aus solchen Darstellungen durch benutzergesteuerte Variation der Werte der Laufparameter. Dabei kann man im Spurmodus das Entstehen der Grafik bei Verwendung der „Schiebertechnik“ beobachten.
- ↘ Es existiert wohl kein (veröffentlichtes) Computerwerkzeug, das zu einer adäquaten computergrafischen Kurvendarstellung die Parameter- bzw. Polarkoordinaten-Darstellung ausgibt.

Vom mathematischen Gesichtspunkt aus ist die Herleitung der algebraischen Gleichung $P(x; y) = 0$ in x und y aus den jeweiligen Konstruktionsvorschriften für die synthetisch-geometrische Kurvenerzeugung interessant und fruchtbar. Denn diese Herleitung liefert – unabhängig von den experimentell-induktiven Erkenntnismöglichkeiten – die Einsicht und die Begründung für die betreffende von Cabri II+ angegebene algebraische Gleichung. Bei algebraischen Kurven 2. Ordnung, den so genannten Kegelschnitten, gelingt es, bei entsprechender Konstruktion, die algebraische Gleichung direkt analytisch-geometrisch herzuleiten. Falls eine solche Herleitung bei algebraischen Kurven höherer Ordnung nicht möglich ist, läuft sie über die Herleitung einer Parameterdarstellung bzw. Polarkoordinaten-Darstellung; dabei kann sich die anschließende Elimination bzw. Substitution der Laufparameter allerdings schwierig gestalten.

2 Eine Behandlungsmethode für einfache algebraische Kurven

Die folgende Methode verbindet sowohl Geometrie und Algebra als auch induktive und deduktive Methoden der Erkenntnisfindung und -sicherung. Sie beansprucht nur elementarmathematische Kenntnisse.

Wir nennen im Hinblick auf diese Methode eine algebraische Kurve „einfach“, wenn bei ganzzahlig gewählten Konstruktionsparametern die Koeffizienten ihrer algebraischen Gleichung bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems ganzzahlig sind.² Damit erfassen wir weitgehend den Bereich der klassischen algebraischen Kurven.

- 1) *Konstruktion* der algebraischen Kurve nach einer Konstruktionsvorschrift mit einem DGS (hier mit Cabri II+) und phänomenologische Beschreibung.

² Man könnte solche algebraischen Kurven auch „diophantisch“ nennen.

- 2) *Variation* der konstruktiven Parameterwerte, um Lage und Formänderung der algebraischen Kurve zu beobachten und zu beschreiben. Gegebenenfalls Erstellung einer entsprechenden Animationsgrafik.
- 3) *Einbettung* der konstruktiv erzeugten algebraischen Kurve in ein geeignet gewähltes kartesisches Koordinatensystem.
- 4) *Automatische Bestimmung der algebraischen Gleichung* $P(x; y) = 0$ der algebraischen Kurve bezüglich des gewählten Koordinatensystems und Punktprobe dieser Gleichung.
- 5) *Bindung* der konstruktiven Parameterobjekte an das ganzzahlige Gitter des Koordinatensystems (mit Gitterpunktfang für Beschränkung auf ganzzahlige Konstruktionsparameter).
- 6) *Experimentell-induktives Herausfinden der Koeffizienten in* $P(x; y) = 0$ und Kontrolle derselben in Abhängigkeit von den konstruktiven Parametern. (Evtl. auch induktive grafische Verifikation von $P(x; y) = 0$ für nicht ganzzahlige Parameter mit einem mathematischen Assistenzprogramm z.B. mit DERIVE.)
- 7) *Mathematische Verifikation von* $P(x; y) = 0$: Direkte analytisch-geometrische Herleitung von $P(x; y) = 0$ aus der Konstruktionsvorschrift. Oder, wenn das nicht möglich ist: Herleitung der Parameterdarstellung bzw. Polarkoordinatendarstellung aus der Konstruktionsvorschrift; dynamische Erzeugung der algebraischen Kurve gemäß dieser Darstellungen zur Kontrolle; anschließende Elimination bzw. Substitution der Laufvariablen bzw. Parameter, auch mit Unterstützung eines CAS (z.B. DERIVE).

3 Anwendung der Behandlungsmethode

Im folgenden wenden wir diese Behandlungsmethode auf vor allem klassische algebraische Kurven 3., 4. und 6. Grades an. Die Kegelschnitte, die auch mit dieser Methode behandelt werden können, sparen wir hier aus. Die Ausführung der einzelnen Handlungsanweisungen der Methode werden dabei nicht immer vollständig beschrieben bzw. eingehalten; auch gehen wir nicht auf die Details des Einsatzes der Computerwerkzeuge ein.

3.1 Kissoide

Die Kissoide („Efeu-Kurve“) gibt einer ganzen Klasse nach dem gleichartigen Prinzip erzeugbaren algebraischen Kurve den Namen. Sie dient u.a. der geometrischen Lösung des Delischen Problems (Problem der Würfelverdoppelung).

Konstruktionsvorschrift:

- Konstruiere einen Kreis mit dem Durchmesser OA (konstruktiver Parameter).

- Konstruiere in A eine Senkrechte (Tangente) auf den Durchmesser OA.
- Lege einen auf dem Kreis beweglichen Punkt K.
- Konstruiere einen Strahl mit dem Anfangspunkt O durch K, der die Tangente in G schneidet.
- Trage die Strecke KG auf dem Strahl von O aus ab.

Welche Ortskurve beschreibt P, wenn K auf dem Kreis umläuft? Wir erhalten als Ortskurve die Kissoide (Abb. 1), die symmetrisch zu OA liegt, in O eine Spitze und die Tangente als Asymptote hat.³

Die Einbettung in das kartesische Koordinatensystem mit Ursprung O und dem Durchmesser OA auf der positiven x-Achse liefert in Cabri II+ eine algebraische Kurve dritten Grades (Abb. 2), die wegen der Symmetrie zur x-Achse nur y-Glieder mit geraden Exponenten hat und für die wir die Punktprobe machen (Abb. 3).

Erst wenn A an das ganzzahlige Gitter gebunden wird und die ganzzahligen Werte des Formparameters a variiert werden (Abb. 4/5), erkennt man den Zusammenhang zwischen a und den Gleichungskoeffizienten. Nur das y^2 -Glieder hat einen vom Parameter a abhängigen Koeffizienten; er ist gleich a und die Kurvengleichung lautet:

$$x^3 + xy^2 - ay^2 = 0 \quad (1)$$

was durch weitere Variation ganzzahliger Werte für a bestätigt werden kann.

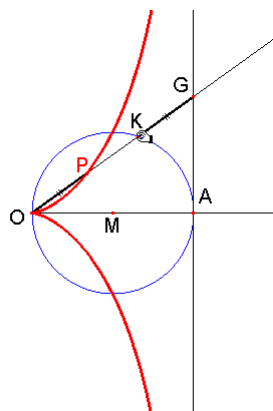


Abb. 1

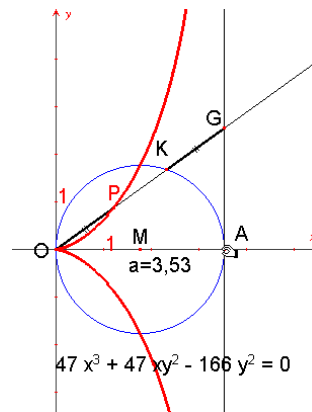


Abb. 2

³ Die den Abbildungen zugrunde liegenden Dateien sind verfügbar unter:
<http://www.mathe-schumann.de>

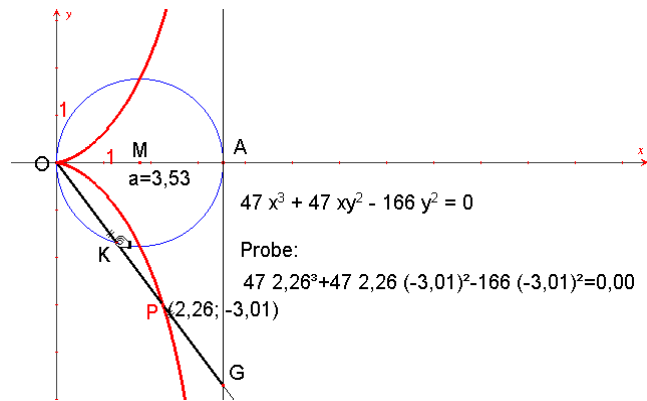


Abb. 3

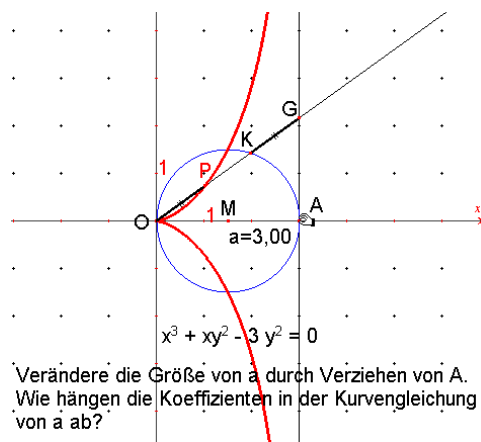


Abb. 4

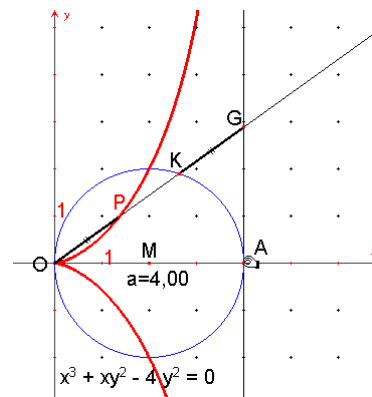


Abb. 5

Wir extrapolieren das Ergebnis für nicht ganzzahlige Parameterwerte, indem wir z.B. mit DERIVE zur Gleichung (1) gehörende Kurven plotten lassen (Beispiel in Abb. 6 für einen Näherungswert von $a = \sqrt{10}$).

$$\begin{aligned} \#1: & \quad x^3 + x^2 - \sqrt{10} \cdot y = 0 \\ \#2: & \quad \left(x - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \\ \#3: & \quad x = \sqrt{10} \end{aligned}$$

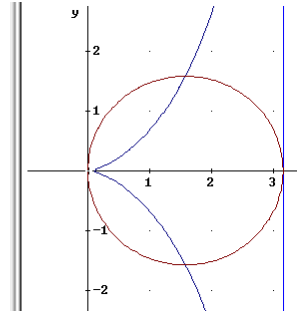


Abb. 6

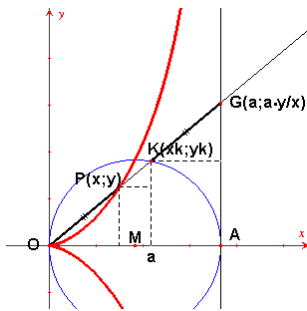


Abb. 7

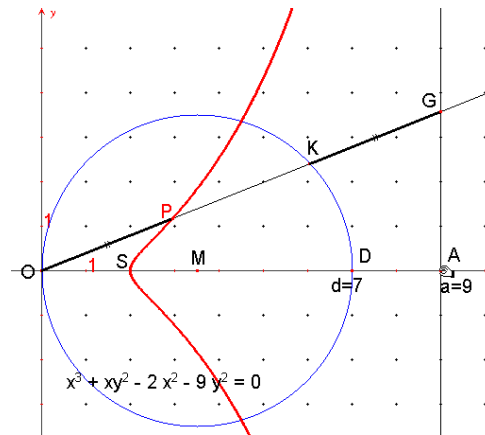


Abb. 8

Anhand von Abbildung 7 kann die analytisch-geometrische Herleitung der algebraischen Gleichung vorgenommen werden: Der Strahl OG hat die Steigung $\frac{y}{x}$ und dementsprechend hat G die Koordinaten $\left(a; a \frac{y}{x}\right)$. Nach Konstruktion hat P die Koordinaten

$$x = a - x_k \quad \text{und} \quad y = a \frac{y}{x} - y_k,$$

also gilt

$$x_k = a - x \quad \text{und} \quad y_k = a \frac{y}{x} - y.$$

Einsetzen in die Kreisgleichung $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ liefert:

$$(a-x)^2 + \frac{y^2}{x^2}(a-x)^2 - a(a-x) = 0$$

Division mit $a-x \neq 0$ (für $x=a$ liegt kein eigentlicher Punkt der Kissoide mehr vor) und Multiplikation mit $x^2 \neq 0$ ergibt:

$$x^3 + xy^2 - ay^2 = 0$$

Zusatz: Wir verallgemeinern nun die Kissoide zur so genannten Hypo-Kissoide, indem wir die Senkrechte AG auf der positiven x-Achse in einem beliebigen Gitterpunkt errichten (Abb. 8). Leicht ist zu erkennen, dass die betreffende jetzt zwei-parametrische Kurve die Gleichung $x^3 + xy^2 + (d-a)x^2 - ay^2 = 0$ hat, wobei $(a-d)$ die x-Koordinate des Schnittpunkts der Kurve mit der x-Achse ist. Für $(d-a) > 0$ muss die Hypokissoide aus zwei Teilkurven, die durch Bewegen von K_1 bzw. K_2 auf den durch die Senkrechte gebildeten Kreisbögen entstehen, zusammengesetzt werden (Abb. 9).

Die Animationsgrafik (Abb. 10) zeigt die unterschiedlichen Formen der Hypo-Kissoide für $0 \leq a \leq d_0$ und für $d_0 \leq a$ (für $a = d_0$ ist deutlich die Kissoide zu sehen, die die Kurven mit $(d_0 - a) > 0$ von denen mit $(d_0 - a) < 0$ trennt).

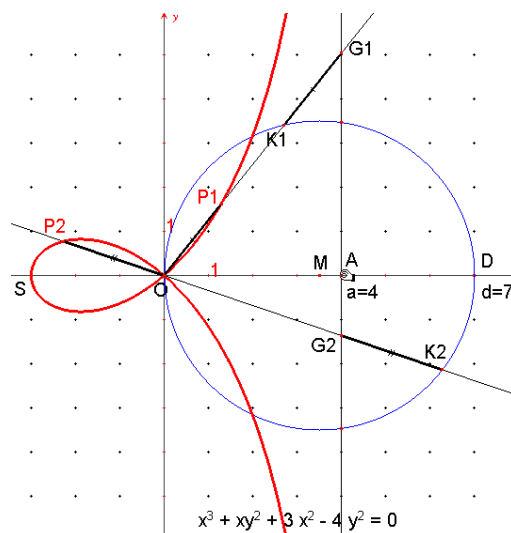


Abb. 9

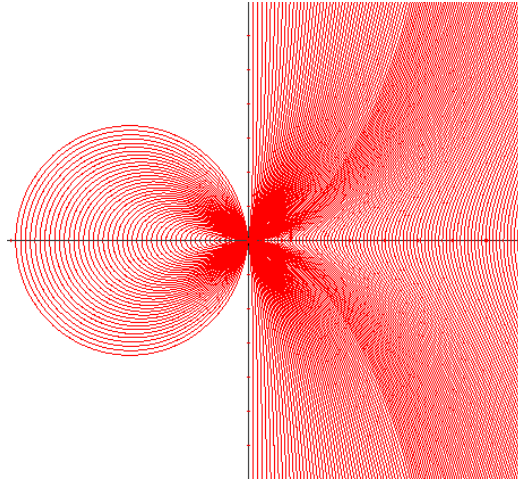


Abb. 10

3.2 Pascalsche Schnecke

Die Pascalsche Schnecke (benannt nach Stephan Pascal, dem Vater des berühmten Blaise Pascal) kann auf verschiedene Weise konstruiert werden. Wir beginnen mit der Lotfußpunkt-Konstruktion (Abb. 11):

- Konstruiere einen Kreis um M durch R und dann einen Punkt P (Pol), zuerst im Kreisäußeren, also mit $|PM| > |MR| = r$.
- Lege einen beweglichen Punkt B auf den Kreis und konstruiere in B die Kreistangente.
- Fülle von P das Lot auf die Kreistangente: Lotfußpunkt F .

Welche Ortskurve beschreibt F , wenn B auf dem Kreis umläuft? Wir erhalten als Ortskurve die Pascalsche Schnecke (Abb. 11), deren Form- und Lageänderung wir durch eine Variation der Parameterwerte für $|PM|$ und für $|MR| = r$ untersuchen (Abb. 12; eine Animationsgrafik bei Variation von $|PM|$).

Die Konstruktion betten wir nun so in ein Koordinatensystem ein, dass M mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt und P auf der x -Achse zu liegen kommt (Abb. 13). Für diese Kurve lassen wir uns bezüglich dieses Koordinatensystems die Gleichung $P(x; y) = 0$ angeben, die den Grad 4 hat und gemäß ihrer Symmetrieeigenschaft nur gerade Exponenten bei y aufweist. Außerdem machen wir eine Punktprobe, um uns von der Richtigkeit der Black-Box-Ausgabe zu überzeugen.

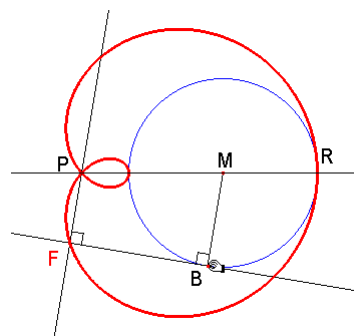


Abb. 11

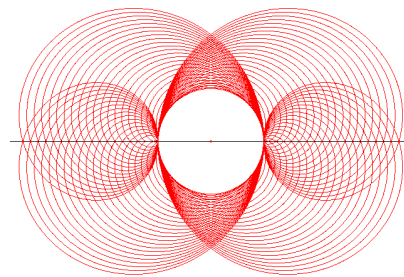


Abb. 12

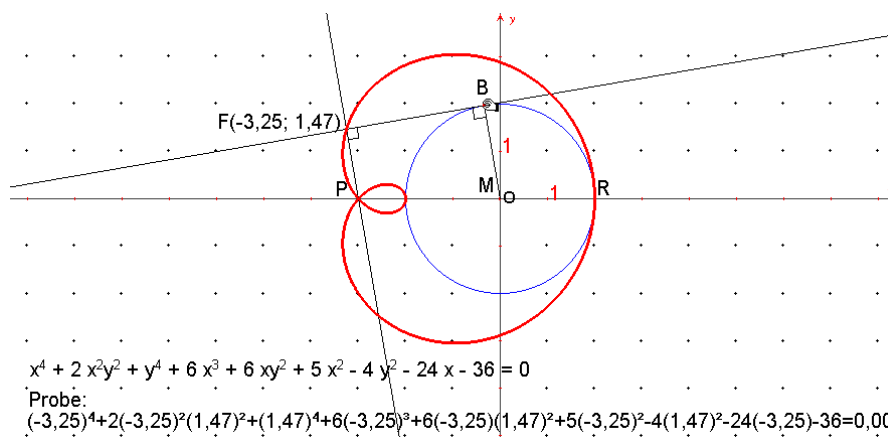


Abb. 13

Man erkennt sofort, dass der Teilausdruck $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$ nicht von den Parametern p und r abhängt. Die Variation der ganzzahligen Parameterwerte für p (beispielsweise wie in Abb. 13; Abb. 14 zeigt für $|p|=r$ die Kardiode oder „Herzkurve“) – und für r lässt erkennen,

- dass jeder der Koeffizienten von x^3 und von xy^2 gleich $2p$,
- dass der Koeffizient von y^2 gleich $-r^2$,
- mit etwas arithmetischem Spürsinn, dass der Koeffizient von x gleich $2pr^2$

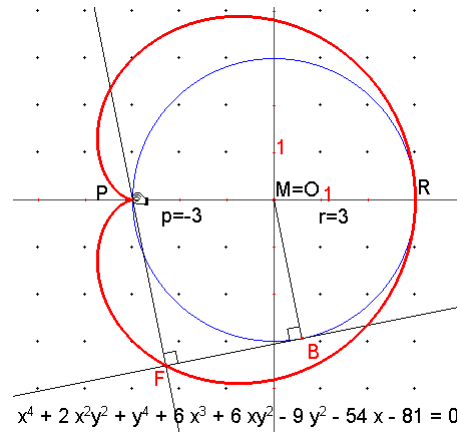


Abb. 14

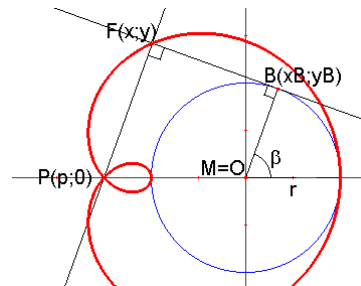


Abb. 15

- dass das konstante Glied gleich $-(pr)^2$ ist.

Wenn man diese Abhängigkeiten nicht gleich erkennt, so fertige man entsprechende Wertetabellen an. Natürlich testet man die vermuteten Abhängigkeiten sofort durch Variation der Parameterwerte von p und r . Den Koeffizient von x^2 findet man heraus, indem man z.B. für $r=3$ folgende Tabelle

p	-1	-2	-3	-4	-5	...
... x^2	-8	-5	0	7	16	...
	+3	+5	+7	+9	...	

aufstellt und dann erkennt, dass die Koeffizienten eine arithmetische Folge 2. Ordnung bilden. Bei festem r ist also der Koeffizient von x^2 ein quadratischer Ausdruck $c_2p^2 + c_1p + c_0$.

c_2 , c_1 , c_0 können wir aus folgendem Gleichungssystem bestimmen:

$$\begin{aligned} -8 &= c_2(-1)^2 + c_1(-1) + c_0 \\ -5 &= c_2(-2)^2 + c_1(-2) + c_0 \\ 0 &= c_2(-3)^2 + c_1(-3) + c_0 \end{aligned}$$

Es ergibt sich $c_2=1$, $c_1=0$, $c_0=-9$, also $p^2 - 9 = p^2 - 3^2$ und vermutlich $p^2 - r^2$, was wir experimentell verifizieren. Schließlich erhalten wir auf experimentell-induktive Weise für die Pascalsche Schnecke bezüglich des gewählten Koordinatensystems folgende Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2px^3 + 2pxy^2 + (p^2 - r^2)x - r^2y^2 + 2pr^2x - (pr)^2 = 0 \quad (2)$$

Jetzt kann man die Gleichung auch für nicht ganzzahlige Koeffizienten überprüfen, indem man wie in Beispiel 1 in DERIVE entsprechende Kurvengleichungen eingibt und die zugehörige Kurve plotten lässt. Wie ist nun die obige Gleichung (2) auf mathematische Art zu verifizieren? Dazu leiten wir die Parameterdarstellung gemäß der Lotfußpunktkonstruktion her, um durch Elimination des Laufparameters die entsprechende Gleichung zu gewinnen. Aus Abbildung 15 entnehmen wir

$$x_B = r \cos \beta \quad \text{und} \quad y_B = r \sin \beta, \quad (3)$$

die Tangentengleichung

$$\frac{y - y_B}{x - x_B} = -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \quad (4)$$

und die Lotgleichung

$$\frac{y}{x - p} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}. \quad (5)$$

Nach Auflösen von (4) bzw. (5) nach y und Gleichsetzen erhalten wir für die x -Koordinate des Lotfußpunktes F :

$$x = p \sin^2 \beta + r \cos \beta \quad (6a)$$

und durch Ersetzung von x in (5) mit (6a) die y -Koordinate von F :

$$y = \sin \beta (r - p \cos \beta) \quad (6b)$$

Ist die Parameterdarstellung (6) wirklich die der Pascalschen Schnecke? Dazu erzeugen wir die zugehörige Kurve auf dynamische Weise mittels „Schiebertechnik“ (Abb. 16). Wir verfügen über Schieber für die Form- bzw. Lageparameter p , r und über einen Schieber für den Laufparameter β . Jetzt kann man das Entstehen der Kurve benutzergesteuert oder per Animation beobachten, während mit den entsprechenden Plotfunktionen von mathematischen Assistenzprogrammen bzw. Funktionsplottern die Kurve als Black-Box-Ergebnis erscheint.

Die Elimination des Laufparameters β gestaltet sich schwieriger. Sie führt über eine quadratische Gleichung für $\cos \beta$ und nach mühsamer Rechnung, am besten mit CAS-Unterstützung, z.B. mit DERIVE, auf eine Gleichung, die zu der in (2) äquivalent ist. Mit dem mächtigen Werkzeug MATHEMATICA erhalten wir mittels des Eliminationskommandos sofort das gewünschte Ergebnis, wenn wir vorher den Sinus noch durch den Cosinus ausdrücken (Abb. 17).

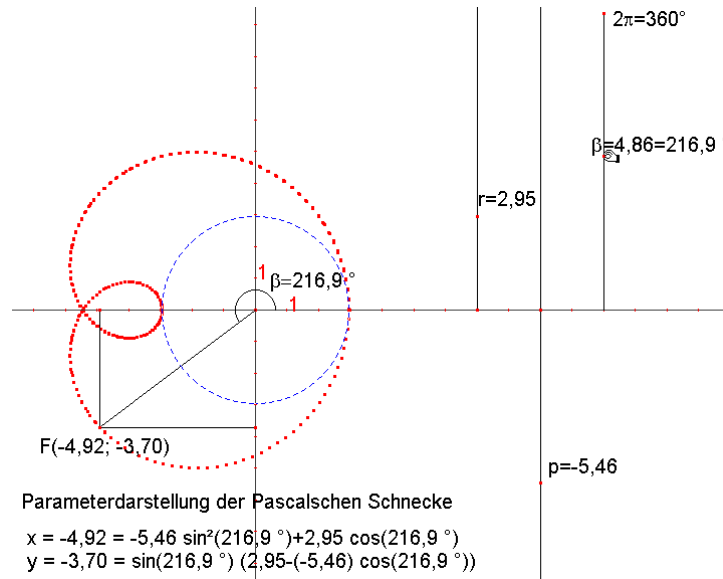


Abb. 16

$$\text{Eliminate}[\{x == p * (1 - (\text{Cos}(\beta))^2) + r * \text{Cos}(\beta), y == \sqrt{1 - (\text{Cos}(\beta))^2} * (r - p * \text{Cos}(\beta))\}, \beta]$$

$$-2 p x^3 + x^4 + p x (2 r^2 - 2 y^2) + x^2 (p^2 - r^2 + 2 y^2) == p^2 r^2 + r^2 y^2 - y^4$$

Abb. 17

Im Folgenden skizzieren wir noch die entsprechende Behandlung der Pascalschen Schnecke als Konchoide („Muschellinie“) des Kreises (vgl. Abb. 18). Die Konchoide einer Kurve k bezüglich eines Pols O besteht aus allen Punkten P für die gilt: Ist K ein beweglicher Punkt auf k und l eine fest gewählte Länge, so liegen OKP auf einer Geraden und es ist $|OP| = |OK| + l$ bzw. $|OP| = |OK| - l$. Die konstruktiven Parameter sind der Kreisdurchmesser a und die Länge l . Man erkennt bzw. findet heraus, ähnlich wie bei der Lotfußpunktkurve durch Variation ganzzahliger Parameterwerte (Abb. 19; Variation der Werte von l), folgende Abhängigkeit der Koeffizienten bezüglich des gewählten Koordinatensystems:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax^3 - 2axy^2 + (a^2 - l^2)x^2 - l^2y^2 = 0 \quad (7)$$

Der konchoidalen Konstruktion lesen wir sofort die Polarkoordinaten-Darstellung

$$\rho = a \cos \varphi \pm l \quad (8)$$

ab (Abb. 20), nach der wir wiederum auf dynamische Weise die Kurve der Pascalschen Schnecke erzeugen können (Abb. 21). Aus (8) folgt nun – im Gegensatz zur Elimination des Laufparameters bei der Parameterdarstellung – mühelos mit $\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$ und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - ax^2)^2 = l^2(x^2 + y^2),$$

die zu (7) äquivalent ist.

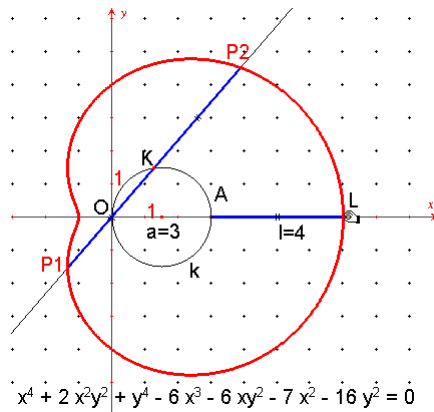


Abb. 18

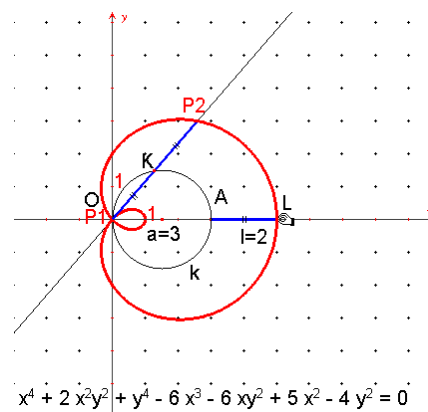


Abb. 19

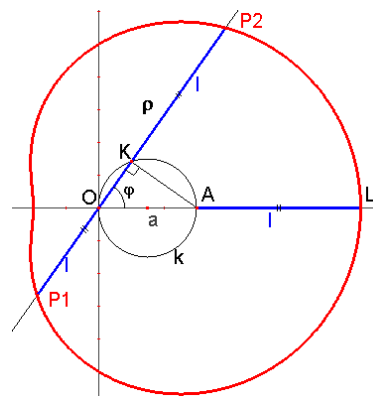


Abb. 20

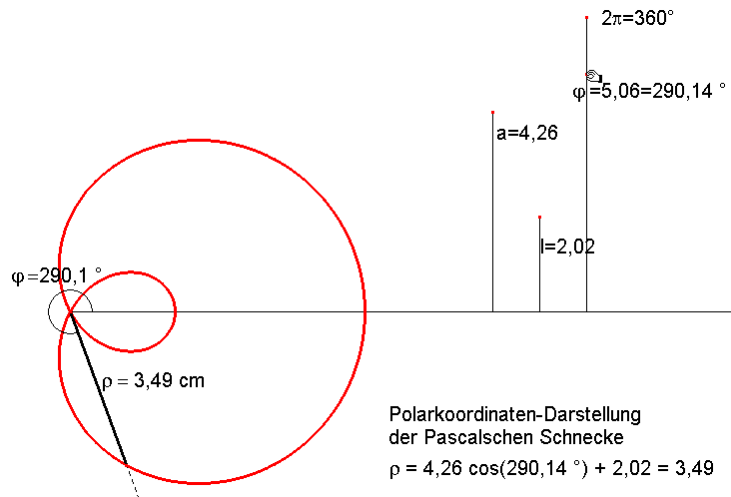


Abb. 21

3.3 Astroide

Als Beispiel für die Erzeugung einer algebraischen Kurve als Rollkurve wählen wir die Astroide, die durch Abrollen eines Kreises auf einem Kreis entsteht (Kreis-Zykloide) und deren Punkte folgendermaßen konstruiert werden können (Abb. 22):

- Kreis um M durch R ($r = |MR|$)
- auf dem Kreis beweglichen Punkt P mit M verbinden
- von P aus ($|MP|/4$ auf MP in Richtung M abtragen: M')
- Kreis um M' mit dem Radius $|MP|/4$
- Parallele zu MR durch M'
- Spiegelung von P an dieser Parallelen, Spiegelung dieses Spiegelpunkts an MP und Spiegeln dieses Radius an der Parallelen liefert A , dessen Winkel gegen die Parallele dreimal so groß ist wie der gegenläufige Winkel RMP (Begründung?).

Welche Ortskurve erzeugt A , wenn P auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M umläuft, d.h. der Kreis um M' mit dem Punkt A abrollt?

Nach Einbettung der Konstruktion in das Gitter des Koordinatensystems mit M als Koordinatenursprung lassen wir uns die betreffende algebraische Gleichung anzeigen, die von der Ordnung 6 ist und in der der Symmetrie der Ortskurve entsprechend alle Exponenten von x und y gerade sein müssen (Abb. 23).

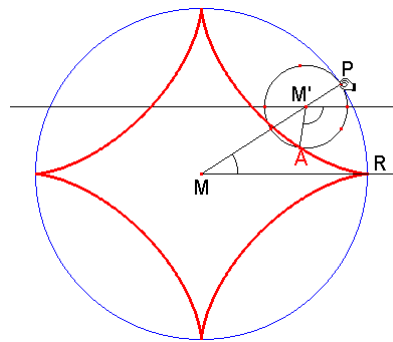


Abb. 22

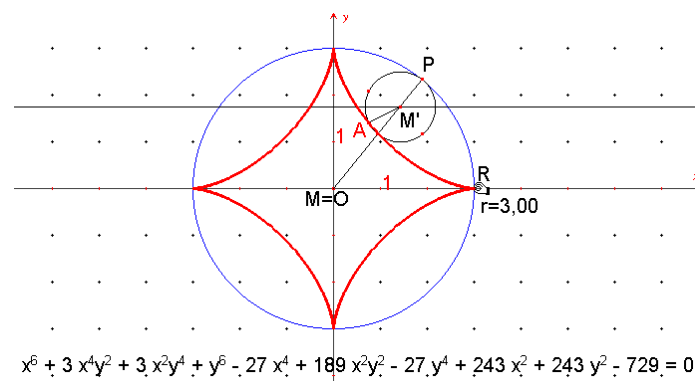


Abb. 23

Bei Variation der Größe des konstruktiven Parameters r durch Verziehen von R (wie in Abb. 23) entdecken wir, dass

- die Glieder der Ordnung 6 von r unabhängig sind und in $(x^2 + y^2)^3$ zusammengefasst werden können,
- x^4 und y^4 den Koeffizienten $-3r^2$ besitzen,
- x^2y^2 den Koeffizienten $3r^2 \cdot 7$ besitzen,
- x^2 und y^2 den Koeffizienten $3r^4$ besitzen und
- das konstante Glied gleich $-r^6$ ist.

Die algebraische Gleichung in x und y kann also folgendermaßen geschrieben werden:

$$(x^2 + y^2)^3 - 3r^2(x^4 - 7x^2y^2 + y^4) + r^4(3x^2 + 3y^2 - r^2) = 0 \quad (9)$$

Wir verifizieren nun diese Gleichung mathematisch, indem wir die Parameterdarstellung der Astroide aufstellen und aus dieser den Laufparameter eliminieren.

Nach Abbildung 24 gilt mit $r' = \frac{1}{4}r$ und $\varphi' = 3\varphi$:

$$\begin{aligned} x &= (r - r') \cos \varphi + r' \cos \varphi' \\ y &= (r - r') \sin \varphi - r' \sin \varphi' \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{4} (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi) \\ y &= \frac{r}{4} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \\ \sin 3\varphi &= 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \end{aligned}$$

folgt daraus:

$$\begin{aligned} x &= r \cos^3 \varphi \\ y &= r \sin^3 \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

Diese Parameterdarstellung führen wir dynamisch aus und kontrollieren so unser Ergebnis (Abb. 25). Wir eliminieren φ durch Ziehen der 3. Wurzel und Quadrieren der Gleichungen (10) und deren anschließendes Addieren:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

Die Umformung zu einer algebraischen Gleichung in x und y erleichtern wir uns beispielsweise mit Hilfe von DERIVE.

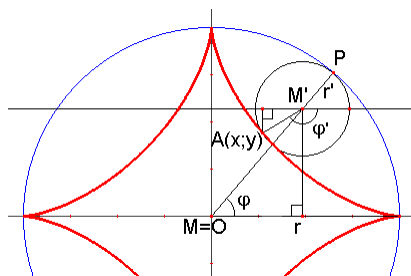


Abb. 24

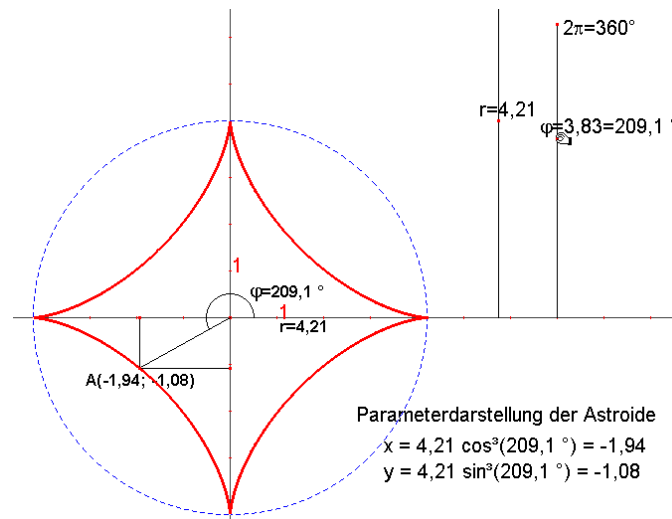


Abb. 25

3.4 Eine „einfache“ Koppelkurve

Aus der Vielzahl der Koppelkurven-Konstruktionen wählen wir die folgende aus:

- Kreis um F_1 durch K
- Punkt P auf diesem Kreis beweglich wählen mit Kurbel F_1P
- Punkt F_1 an O spiegeln: F_2
- Gelenk-Parallelogramm F_2F_1PQ mit Koppel \overline{PQ}
- Q an F_2P spiegeln: Q'
- Mittelpunkt von PQ' : M .

Welche Ortskurve beschreibt M , wenn P auf dem Kreis umläuft?

Die Abbildungen 26 und 27 zeigen besondere Fälle der Kurve auf. Wie hängen die Koeffizienten der algebraischen Gleichung für diese Kurve von den konstruktiven Parametern $a = |F_1F_2|$ und $k = |OK|$ ab? Wie kann die betreffende Gleichung mit den von a und k abhängigen Koeffizienten hergeleitet werden? (Aufgaben für den Leser)

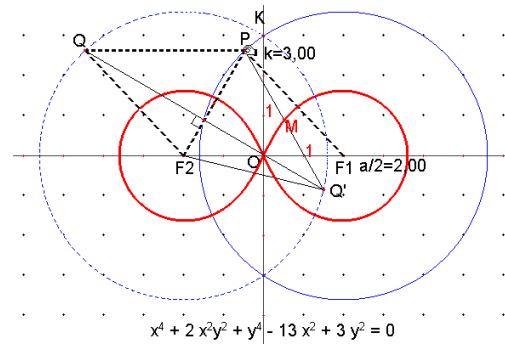


Abb. 26

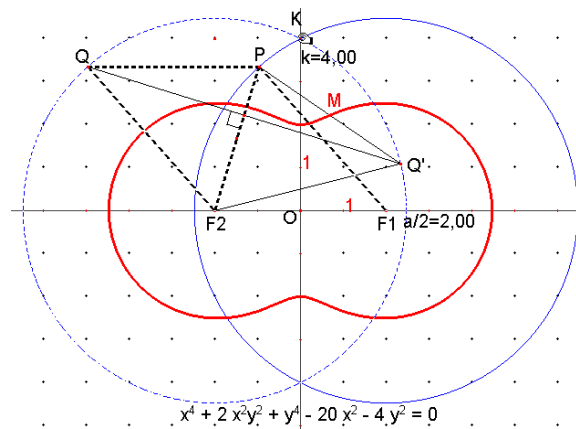


Abb. 27

4 Schlussbemerkungen

4.1 Beschränktheit der Methode

Die vorstehende Methode versagt, wenn

- die betreffende algebraische Kurve einen höheren Grad als 8 hat, also wenn der betreffende numerische Algorithmus nur ungenau arbeitet bzw. der Rechenaufwand zu hoch wird;

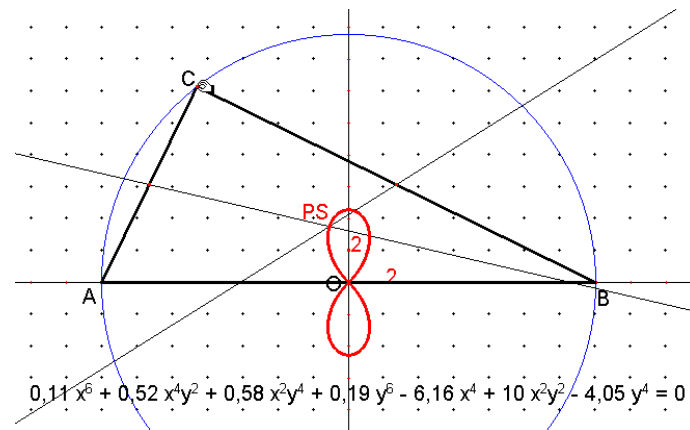


Abb. 28

- die Abhängigkeit der Koeffizienten von den ganzzahligen konstruktiven Parametern nicht rational ist;
- keine ganzzahlige Parametrisierung der geometrischen Konstruktion der algebraischen Kurve zu erwarten ist, was z.B. bei den von besonderen Dreieckspunkten erzeugten Ortskurven der Fall ist, wenn Eckpunkte auf entsprechenden Bahnen laufen. So zeigt die Abbildung 28 eine solche (punktsymmetrische) Ortskurve, die durch den Schnittpunkt der Parallelen zu den Winkelhalbierenden des (rechtwinkligen) Dreiecks ABC erzeugt wird, wenn C auf dem Umkreis läuft.

4.2 Ungelöste Probleme?

Im Zusammenhang mit der in den Abschnitten 2 und 3 entwickelten und konkretisierten Bearbeitungsmethode tritt folgendes Problem auf: Wie lassen sich unter den mit Zirkel und Lineal, oder weiter gehend, unter den mittels Kegelschnitten erzeugbaren algebraischen Kurven jene kennzeichnen, deren Gleichungskoeffizienten ganzzahlige Funktionen ihrer ganzzahligen Konstruktionsparameter sind?

Unter den klassischen algebraischen Kurven kommen keine vom Grad 5 oder 7 vor. Ist das der Fall, weil die algebraischen Kurven von größerem Primzahlgrad als 3, die Nullstellenmengen irreduzibler Polynome sind, nicht mit Zirkel und Lineal oder mittels Kegelschnitten generiert werden können?

Für mit Zirkel und Lineal oder mit Kegelschnitten erzeugte algebraische Kurven lassen sich wohl mittels Gröbnerbasen bezüglich eines Koordinatensystems ihre algebraische Gleichungen exakt berechnen. Welche (algebraische) Charakterisierung haben solche algebraische Kurven?

4.3 Weiterentwicklung der Werkzeuge

Oliver Labs (2002) hat ein neues menüsteuerbares Computerwerkzeug des Namens „SPICY“ für die Behandlung von algebraischen Kurven und Flächen programmiert, das unter Linux läuft und auf das wir hier nicht eingehen, weil es noch nicht in einer entsprechend brauchbaren Windows-Version zur Verfügung steht.

Reinhard Oldenburg (2003) hat ein im experimentellen Entwicklungsstadium befindliches Werkzeug des Namens „Feli-X“ entwickelt, das auf MATHEMATICA aufsetzt und aus einer dynamischen Geometrie-Komponente besteht, die kompatibel mit der Computeralgebra-Komponente von MATHEMATICA arbeitet. Mit Feli-X kann die exakte Gleichung der konstruierten algebraischen Kurve bezüglich des absoluten Koordinatensystems exakt berechnet werden. Die Umkehrung, zu einer algebraischen Gleichung in x und y nicht nur die zugehörige Kurve zu plotten, sondern ein im Sinne der dynamischen Geometrie referenzierbares Objekt zu erzeugen, ist mit prinzipiellen Problemen der „Bidirektionalität“ zwischen CAS und DGS verbunden.

4.4 Theoretische Vertiefung

Gawlick (2001) zeigt vertiefende theoretische Aspekte geometrischer Konstruktionen im Kontext Dynamischer Geometriesysteme auf, die über unseren naiven schulpraxisorientierten methodisch-didaktischen Ansatz hinausgehen.

4.5 Komplexitätsreduktion der Thematik für die Schüler/-innen

Um die Komplexität der Thematik aufzulösen, können z.B. Facharbeiten oder Referate arbeitsteilig vergeben werden:

- Geometrische Konstruktionen für algebraische Kurven (differenziert nach bestimmten Konstruktionsverfahren)
- Algebraische Gleichung algebraischer Kurven
- Parameterdarstellung algebraischer Kurven
- Polarkoordinaten-Darstellung algebraischer Kurven
- ...

Dann muss aber die Zusammenschau vom Lehrer/von der Lehrerin oder in einer weiteren Arbeit bzw. einem Schlussreferat durchgeführt werden.

Literatur

Gawlick, Th. (2001): Exploration reell algebraischer Kurven mit DGS und CAS. In: Elschenbroich, H.-J. et al.: Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte dynamischer Geometrie. Hildesheim: Franzbecker, S. 69–76

- Labs, O. (2002): SPICY – Mehr als dynamische Geometrie mit Hilfe von Computeralgebra. Vortrag auf der Fachtagung „Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung III“, 2.-5. April 2002, Kloster Schöntal (www.oliverlabs.net/spicy)
- Oldenburg, R. (2003): Feli-X: Ein Prototyp zur Integration von CAS und DGS. Erscheint in: Bender, P. et al.: Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Berichte über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM vom 27. bis zum 29. September 2002 in Soest
- Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler und Teubner (auch im Archiv von www.mathe-schumann.de)
- Schumann, H. (1996): Zum Entwicklungsstand geometrischer Unterrichtssoftware. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1996. Hildesheim: Franzbecker, S. 403–406
- Schumann, H. (2001): Die Behandlung von Funktionen einer reellen Variablen mit Methoden der dynamischen Geometrie. In: Elschenbroich, H.-J. et al.: Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie. Hildesheim: Franzbecker, S. 173–182
- Schupp, H./Dabrock, H. (1995): Höhere Kurven – Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag
- Weth, Th. (1993): Zum Verständnis des Kurvenbegriffs im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. habil. Heinz Schumann
PH Weingarten, Fakultät III, Mathematik/Informatik
Institut für Mediendidaktik und Bildungsinformatik
Kirchplatz 2, D-88250 Weingarten
Email: schumann@ph-weingarten.de, Homepage: <http://www.mathe-schumann.de>