

Zur Rolle empirischer Settings in mathematischen Wissensentwicklungsprozessen – eine exemplarische Untersuchung der digitalen Funktionenlupe

FREDERIK DILLING, SIEGEN

Zusammenfassung: In diesem Beitrag wird ein Konzept zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen auf der Grundlage empirischer Objekte im Mathematikunterricht vorgestellt. Das sogenannte CSC-Modell greift dabei auf Begrifflichkeiten und Erkenntnisse des wissenschaftstheoretischen Strukturalismus sowie von Theorien zur Auffassung von Mathematik, zur Kontextgebundenheit von Lernprozessen sowie der allgemeinen Modelltheorie zurück. Das Konzept wird anschließend am Fallbeispiel der digitalen Funktionenlupe expliziert.

Abstract: This article presents a concept for the description of knowledge development processes on the basis of empirical objects in mathematics education. The so-called CSC-model uses terms and findings from the structuralistic theory-concept as well as from theories on beliefs about mathematics, on the context-related nature of learning processes and from cybernetic general model theory. The concept is then explicated in a case study on the digital function-microscope.

1. Einleitung

Der Mathematikunterricht der Schule ist stark von Anschaulichkeit und Realitätsbezug geprägt. Mathematisches Wissen wird dabei nicht nur zur Beschreibung der empirischen Phänomene angewendet, sondern wesentlich auf der Grundlage dieser Phänomene entwickelt.

Der folgende Beitrag stellt ein Konzept zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen mit empirischen Settings (d.h. bewusst in den Lernprozess eingebrachte Zusammenstellungen empirischer Objekte) vor. Das sogenannte CSC-Modell (*Concept – Setting – Conception*) bedient sich dazu Theorien zur Auffassung von Mathematik, zur Kontextgebundenheit von Lernprozessen sowie der allgemeinen Modelltheorie. Auf die detaillierte Darstellung des theoretischen Hintergrunds folgt eine exemplarische Anwendung des Modells im Rahmen einer Fallstudie. Hierzu werden zwei Schülerinterviews zur digitalen Funktionenlupe – ein GeoGebra-Applet zur Einführung von Begriffen der Differentialrechnung – mit einem interpretativen Ansatz analysiert. In einem Fazit werden die Ergebnisse der theoretischen Ausführungen und die empirische Studie zusammengefasst und ein Ausblick zu notwendiger weiterer Forschung zur

Präzisierung der diskutierten Zusammenhänge gegeben.

Das Ziel dieses Artikels ist die Vorstellung des entwickelten CSC-Modells. Zur Explikation der Begrifflichkeiten sowie des Nutzens zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen auf der Grundlage empirischer Objekte dient die Fallstudie zur digitalen Funktionenlupe.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Empirische Auffassung von Mathematik

Untersuchungen zur Auffassung von Mathematik haben ihren Ursprung im englischen Sprachraum. Der englischsprachige Begriff *Belief* wird im Deutschen häufig mit *Auffassung* übersetzt. Alan H. Schoenfeld untersucht in seinem bekannten Buch „Mathematical Problem Solving“ (Schoenfeld, 1985) das mathematische Problemlöseverhalten von Schülerinnen und Schülern sowie von Mathematikern. Dabei unterscheidet er vier Analysekategorien: Das mathematische Faktenwissen (*Resources*) und die Problemlösestrategien (*Heuristics*), die in den Prozess eingebracht werden, die Fähigkeit, den eigenen Problemlöseprozess zu beurteilen und zu steuern (*Control*) sowie die Auffassung von Mathematik (*Belief Systems*). Die Auffassung von Mathematik ist somit nach Schoenfeld (1985) ein zentraler Faktor für ein erfolgreiches Problemlösen:

“One’s beliefs about mathematics can determine how one chooses to approach a problem, which techniques will be used or avoided, how long and how hard one will work on it, and so on. Beliefs establishes the context within which resources, heuristics, and control operate.” (S. 45)

Der Begriff der *Auffassung von Mathematik* oder auch im Englischen *Beliefs about mathematics* wird in der Literatur vielfach verwendet. Schoenfeld (1985) nutzt den Terminus *Belief System* und führt ihn auf das Verhalten gegenüber sich selbst, der Umwelt, dem Thema und der Mathematik zurück:

„Belief Systems: One’s ‘mathematical world view’, the set of (not necessarily conscious) determinants of an individual’s behavior about self, about the environment, about the topic, about mathematics.“ (S. 15)

Pehkonen und Pietilä (2004) beschreiben *beliefs* als subjektives Wissen und Emotionen und grenzen dieses von objektivem Wissen ab:

„An individual’s beliefs are understood as his subjective, experience-based, often implicit knowledge and emotions on some matter or state of art.“ (S. 2)

Auf ähnliche Weise fasst Philipp (2007) *beliefs* wie folgt:

„Psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true.“ (S. 259)

Thompson (1992) betont den variablen Grad der Überzeugung sowie die fehlende Konsensualität:

„One feature of beliefs is that they can be held by varying degrees of conviction. [...] Another distinctive feature of beliefs is that they are not consensual.“ (S. 129)

Scheffler (1965) beschreibt *beliefs* als Grundlage von Wissen:

„This definition sets three conditions for knowing that, and we shall refer to these as the beliefs condition, the evidence condition, and the truth condition.“ (S. 21)

Die Definitionen vom Begriff der Auffassung von Mathematik sind teilweise sehr unterschiedlich fundiert (siehe u. a. Törner & Grigutsch, 1994; Rezat, 2009; Rott, Leuders & Stahl, 2015). In diesem Artikel soll die Definition von *beliefs* im Sinne von Schoenfeld (1985) Anwendung finden, welche den Einfluss von Beliefs auf die Wahrnehmung und das Verhalten betont.

In verschiedenen Studien wurden Auffassungen unterschiedlicher Personengruppen untersucht und klassifiziert (u. a. Grigutsch, Raatz & Törner, 1998; Witzke & Spies, 2016). Auffällig häufig treten die zwei gegensätzlichen Positionen einer *formalen Auffassung* von Mathematik und einer *empirischen Auffassung* von Mathematik auf (u. a. Schoenfeld, 1985; Witzke & Spies, 2016).

Bei einer formalen Auffassung von Mathematik wird diese als abstrakte Strukturwissenschaft verstanden, welche aufbauend auf Axiomen und Definitionen durch deduktive Herleitungen mathematische Sätze entwickelt. Bei einer empirischen Auffassung von Mathematik hingegen entstammen die Untersuchungsobjekte der Realität. Die Begründung mathematischer Sätze erfolgt wesentlich auf der Grundlage dieser empirischen Objekte.

Der Mathematikunterricht der Schule ist stark von Anschauung geprägt und scheint damit die Entwicklung einer empirischen Auffassung von Mathematik nahezulegen. Beispielsweise werden in Schulbüchern zur Analysis wesentliche Aussagen auf der Grundlage von im Buch abgedruckten Funktionsgra-

phen begründet (vgl. Witzke, 2014). Hefendehl-Hebeker (2016) schreibt über die Schulmathematik Folgendes:

„Im Sinne dieser Sprechweise haben die Begriffe und Inhalte der Schulmathematik ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität.“ (S. 16)

Das in einem anschauungsorientierten Mathematikunterricht entwickelte Wissen der Lernenden lässt sich mit dem Konzept der empirischen Theorien beschreiben (vgl. Burscheid & Struve, 2010). Demnach entwickeln Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht eine empirische Auffassung von Mathematik. Das Wissen ist empirisch-gegenständlicher Art und bezieht sich auf spezifische Bereiche ihrer Erfahrung. Gemäß des Theory-theory-Ansatzes (vgl. Gopnik & Meltzoff, 1997) gehen Kinder bei der Entwicklung von Wissen über gewisse Phänomene der Realität in ähnlicher Weise vor wie Wissenschaftler der experimentellen Naturwissenschaften. Sie entwickeln empirische Theorien über die im Unterricht kennengelernten Phänomene.

Eine empirische Theorie baut auf sogenannten empirischen und theoretischen Begriffen auf. Theoretische Begriffe erlangen ihre Bedeutung erst innerhalb einer Theorie. Für diese Begriffe existieren weder Referenzobjekte noch wurden sie in einer anderen (Vor-)Theorie definiert. Nichttheoretische Begriffe sind dagegen solche, die eindeutige Referenzobjekte besitzen, sogenannte empirische Begriffe, oder in einer bereits existierenden Theorie definiert werden können (vgl. Sneed, 1971). Ob ein Begriff empirisch oder theoretisch ist, hängt somit von der zugrundeliegenden Theorie ab – im Falle der Beschreibung von Schülertheorien somit vom einzelnen Lernenden.

2.2 Lernen auf der Grundlage von Erfahrungen

Im Sinne der konstruktivistischen Lerntheorie entwickeln Lernende ihr Wissen auf der Grundlage ihrer Erfahrungen. Dabei können der zu lernende Inhalt und die jeweilige Lernsituation nicht als voneinander getrennt gesehen werden. Brown, Collins und Duguid (1989) schreiben hierzu Folgendes:

“Recent investigations of learning, however, challenge this separating of what is learned from how it is learned and used. The activity in which knowledge is developed and deployed, it is now argued, is not separable from or ancillary to learning and cognition. Nor is it neutral. Rather, it is an integral part of what is learned. Situations might be said to co-produce knowledge through activity. Learning and cognition, it is now possible to argue, are fundamentally situated.” (S. 32)

Lernen von Mathematik findet somit nicht isoliert im Sinne einer reinen kognitiven Aktivität statt, sondern

F. Dilling

wird stets von sozialen, kulturellen, kontextuellen und physischen Faktoren beeinflusst (u. a. Cobb, 1994; Lave, 1988; Núñez, Edwards & Filipe Matos, 1999). Diese durch die Lernsituation bestimmten Faktoren bestimmen demnach wesentlich das von den Lernenden entwickelte Wissen.

Die Theorie der „Subjektiven Erfahrungsbereiche“ nach Bauersfeld (1983) kann zu einer entsprechenden Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen herangezogen werden. Demnach wird jede menschliche Erfahrung in einem bestimmten Kontext gemacht und ist auf diese Weise an die Situation gebunden. Die Erfahrungen werden in voneinander getrennten sogenannten „Subjektiven Erfahrungsbereichen“ (kurz: SEB) gespeichert. Ein solcher SEB beinhaltet sowohl die kognitive Dimension der Erfahrung als auch Faktoren wie Motorik, Emotionen, Wertungen oder die Ich-Identität.

Die Gesamtheit der SEB bilden die sogenannte „society of mind“. In diesem System sind die SEB nicht hierarchisch geordnet und konkurrieren um Aktivierung. Wird eine ähnliche Situation mehrfach wiederholt, führt dies zu einer Festigung eines SEB und damit auch zu einer effektiveren Aktivierung in weiteren Situationen. Des Weiteren können Erfahrungen, die mit positiven Emotionen besetzt sind, in späteren Situationen präziser wiedergegeben werden. Eine Störung der Identitätsbalance oder negative Emotionen können dagegen zur Regression, also dem Rückfall in einen früheren SEB führen. Durch häufige Aktivierung können SEB verändert und umgeformt werden. Nicht mehr aktivierte SEB verblassen zunehmend, werden aber nicht entfernt.

In Wissensentwicklungsprozessen im Mathematikunterricht ist die Anwendung von in einem Kontext erworbenen Wissen auf weitere Kontexte von besonderer Bedeutung. Dies geschieht nach Bauersfeld (1983) durch den aktiven Versuch, unter der Bildung eines vergleichenden SEB, Perspektiven verschiedener SEB zu vernetzen. Dieser Vergleich kann nur aus der Perspektive des neuen SEB geschehen, dessen Bildung einer aktiven Sinnkonstruktion des Lernenden bedarf. Der Prozess der Sinnstiftung kann zwar von außen unterstützt werden, muss aber vom Lernenden selbst vorgenommen werden. Es ist zu beachten, dass nach Bauersfeld kein Begriff allgemein, d.h. bereichsunabhängig aktivierbar ist, da dieser nur im Zusammenhang mit anderen Begriffen Sinn erhält. Entsprechend ist der Sprachgebrauch eines SEB spezifisch und kann daher zur Rekonstruktion eines SEB herangezogen werden (vgl. Tiedemann, 2016).

Auf der Grundlage der Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche kann der Begriff der Auffassung von Mathematik präzisiert werden. Auffassungen sollen hierzu als durch SEB konstituiert beschrieben

werden. Entsprechend können einem Subjekt unterschiedliche Auffassungen zugeschrieben werden, welche in den unterschiedlichen SEB begründet sind. Stoffels (2020) definiert den Begriff der Auffassung (bzw. Belief-System) daher als von einem Beobachter zugeschriebene Zusammenfassung von rekonstruierten SEB aufgrund identifizierter Ähnlichkeiten:

„Eine Möglichkeit diese Beobachtung zu präzisieren liegt darin festzustellen, dass Belief-Systeme eines Subjekts Äquivalenzklassen subjektiver Erfahrungsbereiche bilden.“ (S. 166)

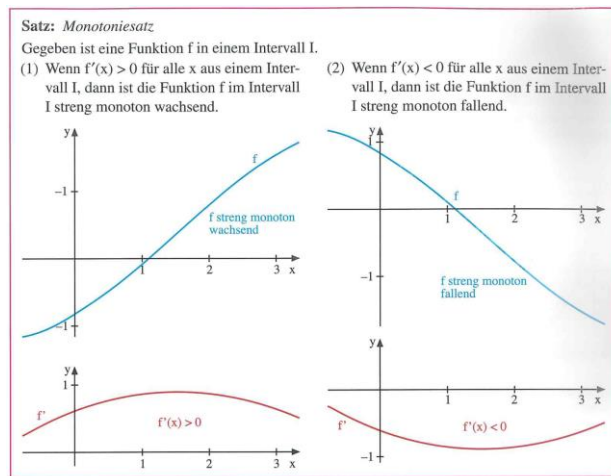
2.3 Heuristische empirische Settings und die Allgemeine Modelltheorie

Lernende mit einer empirischen Auffassung von Mathematik entwickeln und begründen mathematische Aussagen auf der Grundlage von empirischen (Referenz-)Objekten. Dass sich die Entwicklung von mathematischen Begriffen und Beziehungen zwischen diesen Begriffen im Unterricht nicht ausschließlich auf die formale Definition oder formale Herleitung beschränken sollte, gilt als allgemein anerkanntes Prinzip und wird durch viel verwendete Konzepte, wie beispielsweise das der *Grundvorstellungen* (vom Hofe, 1992) oder das des *Concept Image* (Tall & Vinner, 1981) gestützt. Zur Initiierung von Wissensentwicklungsprozessen werden den Schülerinnen und Schülern daher im Unterricht häufig empirische Objekte zur Verfügung gestellt, mit denen sich nach Ansicht der Lehrkraft bestimmte intendierte mathematische Aussagen entwickeln oder begründen lassen. Eine solche bewusste Zusammenstellung von empirischen Objekten soll im Folgenden als (heuristisches) empirisches Setting bezeichnet werden.

Der Begriff des empirischen Settings ist damit sehr breit angelegt und geht von Zeichenblattfiguren bis hin zu naturwissenschaftlichen und lebensweltlichen Phänomenen. Die Objekte können direkt vorliegen (Bsp. geometrische Konstruktion) oder auch in Textform (verbal, algebraisch, numerisch etc.) beschrieben und damit der Vorstellungskraft überlassen sein (Bsp. in einem Gedankenexperiment) oder durch den Lernenden selbst gebildet werden (Bsp. Konstruktionsbeschreibung).

In Abbildung 1 ist ein empirisches Setting im obigen Sinne zu sehen. Es handelt sich um einen Auszug aus dem Schulbuch *Elemente der Mathematik* (Griesel et al., 2010) und behandelt den Monotoniesatz aus der Analysis. Die Aussage des Monotoniesatzes wird zu Beginn des Abschnitts in Textform wiedergegeben. Unter dem Text befinden sich die Funktionsgraphen einer Funktion und ihrer Ableitung. Es folgt der Satz „Der Monotoniesatz ist anschaulich einleuchtend, sein Beweis aber schwieriger als man vermutet.“

(S. 205). Die Aussage wird somit mit einem interpretierten Zusammenhang der Funktionsgraphen, welche als empirische Objekte im Sinne des Strukturalismus bezeichnet werden können, begründet.



Der Monotoniesatz ist anschaulich einleuchtend, sein Beweis aber schwieriger als man vermutet. Wir verzichten daher auf einen Beweis.

Abb. 1: Formulierung und Begründung des Monotoniesatzes im Schulbuch Elemente der Mathematik (© Griesel et al., 2010, S. 205)

Empirische Settings sind keineswegs als selbstevident zu betrachten. Jahnke (1989) unterscheidet die expliziten und impliziten Bedeutungsstrukturen von anschaulichen Darstellungen. Explizite Strukturen werden vom Lernenden unmittelbar wahrgenommen. Implizite Strukturen werden erst durch die Anwendung, also das adäquate Handeln, aufgedeckt. Demensprechend wird ein empirisches Setting unter Umständen von der Lehrkraft ganz anders wahrgenommen und interpretiert als von Lernenden. Der Grund hierfür ist in der zugrundeliegenden Schüler- bzw. Lehrertheorie zu sehen.

Damit Wissensentwicklung mit einem empirischen Setting möglich wird, muss die betreffende Person dieses in die eigene Theorie einbinden. Dies geschieht, indem die Begriffe der eigenen Theorie mit den empirischen Objekten in Beziehung gesetzt werden. Im Sinne des Konzeptes der Subjektive Erfahrungsbereiche wird beim Deutungsprozess des empirischen Settings entweder ein bereits existierender SEB aktiviert oder ein neuer SEB gebildet.

Um die Einbindung eines empirischen Settings in eine (empirische) mathematische Theorie zu präzisieren, kann nutzbringend der Modellbegriff der allgemeinen Modelltheorie nach Stachowiak (1973) herangezogen werden. Dieser wird im Wesentlichen durch drei Merkmale definiert.

- **Abbildungsmerkmal:** „Modelle sind stets Modelle von etwas, nämlich Abbildungen, Repräsentationen natürlicher oder künstlicher Originale, die selbst wieder Modelle sein können.“

- **Verkürzungsmerkmal:** „Modelle erfassen im allgemeinen nicht alle Attribute des durch sie repräsentierten Originals, sondern nur solche, die den jeweiligen Modellerschaffern und/oder Modellbenutzern relevant scheinen.“

- **Pragmatisches Merkmal:** „Modelle sind ihren Originalen nicht per se eindeutig zugeordnet. Sie erfüllen ihre Ersetzungsfunktion a) für bestimmte – erkennende und/oder handelnde, modellbenutzende Subjekte, b) innerhalb bestimmter Zeitintervalle und c) unter Einschränkung auf bestimmte gedankliche oder tatsächliche Operationen.“ (Stachowiak, 1973, S. 131-133)

Wesentlich für diesen Modellbegriff ist die Original-Modell-Abbildung, welche die Eigenschaften des Modells den Eigenschaften des Originals zugeordnet (*Abbildungsmerkmal*). Empirische Settings stehen mit empirischen mathematischen Theorien in einer Original-Modell-Beziehung. Der Modellbegriff soll dabei als bidirektional verstanden werden. Was als Original und was als Modell gesehen wird, ist nicht per se gegeben, sondern wird erst durch die jeweilige Beschreibung festgelegt.

Zur Präzisierung der möglichen Rollen eines empirischen Settings in Bezug auf eine Theorie, soll an dieser Stelle zwischen Theorieentwicklung und Theorieanwendung unterschieden werden. Als Theorieanwendung sollen solche Situationen bezeichnet werden, in denen die Theorie hinsichtlich ihres Anwendungsbereiches erweitert wird, ohne dass weitere Erkenntnisprozesse bezogen auf die ursprüngliche Theorie mit der Nutzung des empirischen Settings verbunden sind. Ein Beispiel hierfür ist das Gebiet des mathematischen Modellierens, bei dem bekanntes Wissen auf andere Phänomenbereiche angewendet wird (vgl. u. a. Pollak, 1979; Blum & Niss, 1991). In dieser Arbeit soll in Abgrenzung dazu Theorieentwicklung betrachtet werden. Darunter sollen solche Situationen verstanden werden, in welchen die Theorie auf der Grundlage des empirischen Settings hinsichtlich ihres Kerns erweitert wird, also insbesondere neue Begriffe oder Relationen zwischen Begriffen entwickelt werden. Die Rolle eines empirischen Settings wird also erst durch eine entsprechende Nutzung festgelegt.

Die Identifikation und Zuordnung von Eigenschaften erfolgt bewusst oder unbewusst durch die mit dem Setting arbeitende und dieses damit interpretierende Person. Der Begriff der Eigenschaft beschreibt sowohl die empirischen Objekte und ihre möglichen Beziehungen in dem empirischen Setting als auch die empirischen und theoretischen Begriffe und ihre Be-

ziehungen in der mathematischen Theorie. Bei theoretischen Begriffen sind den Wissensentwicklungsprozessen allerdings gewisse Grenzen gesetzt – ein empirisches Setting kann in diesem Fall nur im Rahmen gewisser Kontexte und mit Blick auf gewisse Aspekte auf die Theorie übertragen werden. Welche Eigenschaften in dem Setting wahrgenommen werden und mit welchen Eigenschaften der mathematischen Theorie diese in Beziehung gesetzt werden, hängt von der einzelnen Person ab (*Verkürzungsmerkmal*).

Die einem Subjekt zugeschriebene Auffassung von Mathematik bestimmt wesentlich, für welche Zwecke das empirische Setting genutzt wird (*pragmatisches Merkmal*). Im Sinne einer formalen Auffassung von Mathematik können empirische Settings als Veranschaulichung bezeichnet werden, auf die gewisse Aspekte des mathematischen Wissens angewendet werden. Das empirische Setting wird dabei insbesondere zur Verdeutlichung von Zusammenhängen genutzt, hat also rein heuristischen Wert. Bei einer empirischen Auffassung von Mathematik bilden die Objekte des empirischen Settings dagegen die Referenzobjekte der empirischen Theorie – entsprechend kann diese zur Weiterentwicklung und Begründung verwendet werden. Welche im empirischen Setting interpretierten Eigenschaften auf die eigene mathematische Theorie übertragen werden und welche bewusst oder unbewusst nicht betrachtet werden, wird dabei durch die das Setting nutzende Person bestimmt.

2.4 Das CSC-Modell zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen mit empirischen Settings

Die bisherigen Ausführungen können zu einem Konzept zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen mit empirischen Settings im Mathematikunterricht zusammengeführt werden. Dieses soll als CSC-Modell bezeichnet werden und bezieht sich auf die englischsprachigen Begriffe *Concept*, *Setting* und *Conception*.

Entsprechend des CSC-Modells werden empirische Settings für den Mathematikunterricht gezielt ausgewählt oder entwickelt, um einen bestimmten mathematischen Begriff oder den Zusammenhang eines Begriffes mit anderen Begriffen aus dem Setting abzuleiten. Der Prozess der Auswahl eines als adäquat geltenden empirischen Settings wird auf verschiedenen Ebene unter anderem durch Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler der Mathematikdidaktik, Schulbuchautorinnen und –autoren sowie Lehrerinnen und Lehrer vollzogen und geschieht auf der Basis des intersubjektiv geteilten mathematischen Wissens – wir sprechen in diesem Zusammenhang im Weiteren von dem Begriff des *Concepts*. Dieses Vorgehen ist vornehmlich als stoffdidaktisch zu bezeichnen und es lassen sich unter anderem Konzepte wie das der Grundvorstellungen (vom Hofe, 1992) anführen. Dem empirischen Setting kommt dann die Aufgabe einer intendierten Veranschaulichung von mathematischen Begriffen und Beziehungen zu.

Ein Lernender, der im Mathematikunterricht mit einem empirischen Setting umgeht, interpretiert dieses, indem er die Objekte und Beziehungen den Begriffen und Beziehungen seiner eigenen empirischen mathematischen Theorie zuordnet. Die empirische Theorie

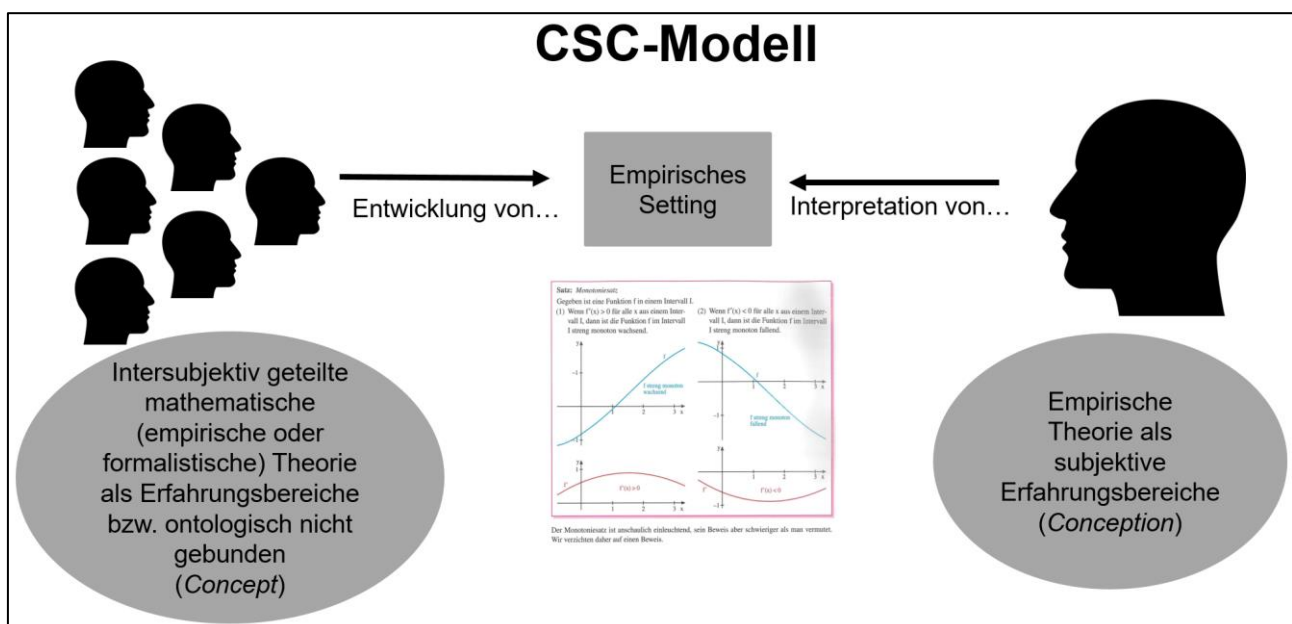


Abb. 2: CSC-Modell zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen mit empirischen Settings

(bzw. ihr kognitiver Anteil) kann in Form von subjektiven Erfahrungsbereichen beschrieben werden. Die Aktivierung eines subjektiven Erfahrungsbereiches beschreibt dann, welcher Begriff mit welchem Objekt verbunden wird. Im Umgang mit einem empirischen Setting entwickelt der Lernende dann die empirische mathematische Theorie weiter (*Conception*), indem die Beziehungen in dem Setting auf die Begriffe der empirischen Theorie übertragen werden.

Der Begriff *Concept* steht somit im Verhältnis zur intersubjektiv geteilten mathematischen Theorie, während *Conception* die individuelle Theorie einer Person, z. B. einer Schülerin oder eines Schülers, beschreibt. Das empirische Setting wird somit in die einzelnen Schülertheorien individuell und unter Umständen auf andere Weise eingebunden als in die Theorien der Entwickler bzw. Auswählenden – die Theorie und das empirische Setting können als jeweils in einer Original-Modell-Beziehung zueinanderstehend beschrieben werden. Eine schematische Darstellung des CSC-Modells ist in Abbildung 2 zu sehen.

3. Fallstudie

3.1 Rahmenbedingungen und Methodik

Die oben dargestellte Konzeption zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen von Schülerinnen und Schülern mit empirischen Settings soll in diesem Abschnitt exemplarisch an der sogenannten digitalen Funktionenlupe verdeutlicht werden – ein von Hans-Jürgen Elschenbroich entwickeltes GeoGebra-Applet zur Einführung der Differentialrechnung (Elschenbroich, 2015; Elschenbroich, Seebach & Schmidt, 2014). Verschiedene mathematikdidaktische Untersuchungen der letzten Jahre konnten bereits zeigen, dass Schülerinnen und Schüler beim Umgang mit digitalen Medien eine empirische Auffassung von Mathematik (weiter)entwickeln können (vgl. u. a. Dilling, Pielsticker & Witzke, 2019; Pielsticker, 2020; Dilling & Witzke, 2020). In diesem Beitrag soll der Fokus auf die Beschreibung der Einbindung eines empirischen Settings in eine (empirische) Schülertheorie gesetzt werden. Hierzu werden Ausschnitte zweier Interviews mit Schülern einer 10. Klasse einer Sekundarschule in Nordrhein-Westfalen auf der Grundlage des beschriebenen Theorierahmens analysiert. Die Schüler haben im Unterricht bereits lineare Funktionen und Parabeln kennengelernt. Der Steigungsbegriff wurde bis zum Zeitpunkt des Interviews allerdings nur im Falle der linearen Funktionen behandelt. Die Analyse der Interviews erfolgt mit Hilfe eines interpretativen Forschungsansatzes (Maier & Voigt, 1991) auf der Basis von Transkripten.

Ziel der Fallstudie ist es, die Möglichkeiten einer Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen im Kontext empirischer Settings mit dem CSC-Modell beispielhaft aufzuzeigen. Dabei wird der Frage nachgegangen, wie die digitale Funktionenlupe in die Theorieentwicklung der zwei Schüler einbezogen wird. Dies umfasst die folgenden Forschungsfragen:

- Wie werden die Begriffe der Schülertheorie mit den empirischen (Referenz)Objekten in Beziehung gesetzt?
- Welche Begriffe und Aussagen über Begriffe werden gebildet und wie werden diese begründet?

Um den Prozess der Theoriebildung für die wissenschaftliche Auswertung zugänglich zu machen, wurden klinische Einzelinterviews mit Schülerinnen und Schülern geführt (vgl. Ginsburg, 1981). Im Vorfeld zu den Interviews wurde ein Leitfaden erstellt, sodass zielführende Fragen gestellt werden konnten, die im Einzelnen aber spontan an den Interviewverlauf angepasst werden konnten.

Im Folgenden wird zunächst die digitale Funktionenlupe als Untersuchungsgegenstand in den Interviews detailliert beschrieben. Der Bezug auf relevante mathematikdidaktische Veröffentlichungen legt die Intention der Entwickler dieses empirischen Settings offen. Anschließend werden Interviews mit zwei Schülern episodisch wiedergegeben und interpretiert, wobei sich bei der Darstellung auf besonders aussagekräftige Interviewabschnitte beschränkt wird. In einem weiteren Abschnitt werden die Ergebnisse zusammengefasst und mit Bezug auf die Forschungsfragen diskutiert.

3.2 Die digitale Funktionenlupe

Das GeoGebra-Applet „Digitale Funktionenlupe“ von Hans-Jürgen Elschenbroich (Elschenbroich, 2015, Elschenbroich et al., 2014) wurde zur Einführung der Differentialrechnung entwickelt und basiert auf einem Konzept von Arnold Kirsch, welcher die Eigenschaft der lokalen Linearität eines differenzierbaren Funktionsgraphen als Anlass für erste Begegnungen mit dem Ableitungsbegriff nutzt. Kirsch (1979) beschreibt die grundlegende Idee wie folgt:

„Wir sehen uns den Graphen einer (geeigneten) Funktion f in der Nähe eines festen Punktes P mit einem „Mikroskop“ an. Dabei bemerken wir, daß das beobachtete kleine Graphenstück bei hinreichend starker Vergrößerung praktisch geradlinig verläuft und somit eine gewisse Steigung besitzt. Dies ist die Steigung von f an der betreffenden Stelle.“ (S. 25)

Es handelt sich um ein idealisiertes Mikroskop, das bei Vergrößerung lediglich ein kleineres Funktionsintervall in einem größeren Maßstab, allerdings eine

gleichbleibend dicke Linie anzeigt. Wird der Graph¹ einer differenzierbaren Funktion entsprechend vergrößert und in einem ausreichend kleinen Intervall betrachtet, ist der Verlauf des Graphen nicht mehr von dem einer linearen Funktion zu unterscheiden. Die Änderungen der Funktionswerte sind lokal fast proportional zur Änderung des Arguments. Der Proportionalitätsfaktor kann als Steigung graphisch bestimmt werden. Hierbei handelt es sich natürlich nicht um eine formal abschließende Definition der Ableitung einer Funktion an einer ausgewählten Stelle – ein formaler Grenzwert entzieht sich grundsätzlich einer empirischen Definition. Es handelt sich dabei um einen theoretischen Begriff, denn ein unendliches Vergrößern des Funktionsgraphen ist in der Empirie nicht möglich. Die Lernenden sollen erste qualitative Erfahrungen mit dem Begriff machen, die dann im weiteren Unterrichtsverlauf ausgebaut werden können.

Die Vorstellung einer Tangente als Schmiegegerade oder einer linearen Funktion zur lokalen Approximation der Funktion wird bei dem beschriebenen Ansatz von Kirsch nicht in den Blick genommen. Stattdessen ist der Funktionsgraph selbst mit seiner Eigenschaft der lokalen Linearität im Mittelpunkt. Auf diese Weise kann auch der Begriff der Differenzierbarkeit empirisch gefasst werden. Eine differenzierbare Funktion ist eine Funktion, die bei zunehmender Vergrößerung linear erscheint. Anderenfalls handelt es sich um eine nicht differenzierbare Funktion. Diese Vorstellung kann durch die Einführung sogenannter Sektorstreifen und des Grenzwertbegriffs zu einer formalen Definition der Differenzierbarkeit ausgebaut werden (vgl. Kirsch, 1995).

Kirsch (1980) hat die Idee des Funktionenmikroskops mit Folien für einen Overheadprojektor umgesetzt, indem ein Ausschnitt eines Funktionsgraphen schrittweise um das Vierfache vergrößert abgedruckt wurde (siehe Abb. 3).

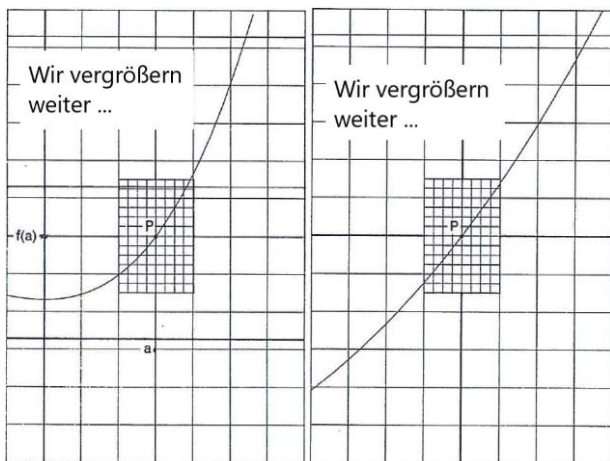


Abb. 3: Vierfache Vergrößerung eines Ausschnitts eines Funktionsgraphen (Kirsch, 1980)

Neben Arnold Kirsch hat sich insbesondere der britische Mathematikdidaktiker David Tall mit dem Ansatz des idealisierten Vergrößerns von Funktionsgraphen bzw. Kurven beschäftigt. Tall (2013) beschreibt einen qualitativen Zugang zum Ableitungsbegriff in dem unter anderem Erkundungen mit einer eigens programmierten Software zum digitalen Vergrößern von Funktionsgraphen gemacht werden sollen. Im Vordergrund stehen Erfahrungen zur Differenzierbarkeit einer Funktion. Die Lernenden sollen die Notwendigkeit einer präzisen Definition des Begriffs erkennen, indem zunächst eine überall differenzierbare Funktion vergrößert und untersucht wird. Anschließend wird die Summe aus der differenzierbaren Funktion und einer an keiner Stelle differenzierbaren Funktion (die Blancmange-Funktion²) mit im Vergleich kleinen Funktionswerten betrachtet. Der Graph ist im Ausgangsmaßstab nicht von dem ursprünglichen Graphen zu unterscheiden. Wird er allerdings ausreichend vergrößert, ergeben sich zunehmend mehr Abschnitte, die nicht linear verlaufen. David Tall fasst die Vorzüge des Zugangs folgendermaßen zusammen:

„An embodied approach to the calculus is so much more than a naive approach suitable to teach novice learners, it reveals genuine insights into why we must refine our embodiment in our imagination and make it more precise by introducing exact symbols and, at a suitable stage, formal definitions.“ (Tall, 2013, S. 317)

Das Vergrößern eines Funktionsgraphen mit einem Funktionenmikroskop weist verschiedene Parallelen zum Leibnizschen Calculus auf. Leibniz entwickelte die Differentialrechnung zur Untersuchung von auf einem Zeichenblatt gegebenen Kurven (vgl. Witzke, 2009). Dies konnte durch die Einführung von infinitesimalen Größen graphisch repräsentiert im sogenannten charakteristischen Dreieck erreicht werden. Die mit dem Funktionenmikroskop verbundenen Vorstellungen können zu einer formalen Theorie über infinitesimale Größen im Rahmen der Nichtstandardanalysis ausgebaut werden (vgl. Tall, 1980). Außerdem lässt sie sich beispielsweise auf den Begriff des Integrals übertragen. So führt das Strecken eines Funktionsgraphen entlang der x -Achse zu einer zunehmend zu dieser Achse parallelen Linie (Tall, 1991).

Hans-Jürgen Elschenbroich hat das Funktionenmikroskop unter dem Namen digitale Funktionenlupe mit der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra umgesetzt und erweitert. Im Programm werden zwei Fenster parallel angezeigt. Im linken Fenster ist ein Funktionsgraph in einer selbst gewählten Auflösung zu sehen. Durch die Eingabe eines Funktionsterms kann ein beliebiger Graph generiert werden. Symmetrisch um einen Punkt A auf dem Funktionsgraphen ist ein orange gefärbtes Quadrat gesetzt, dessen

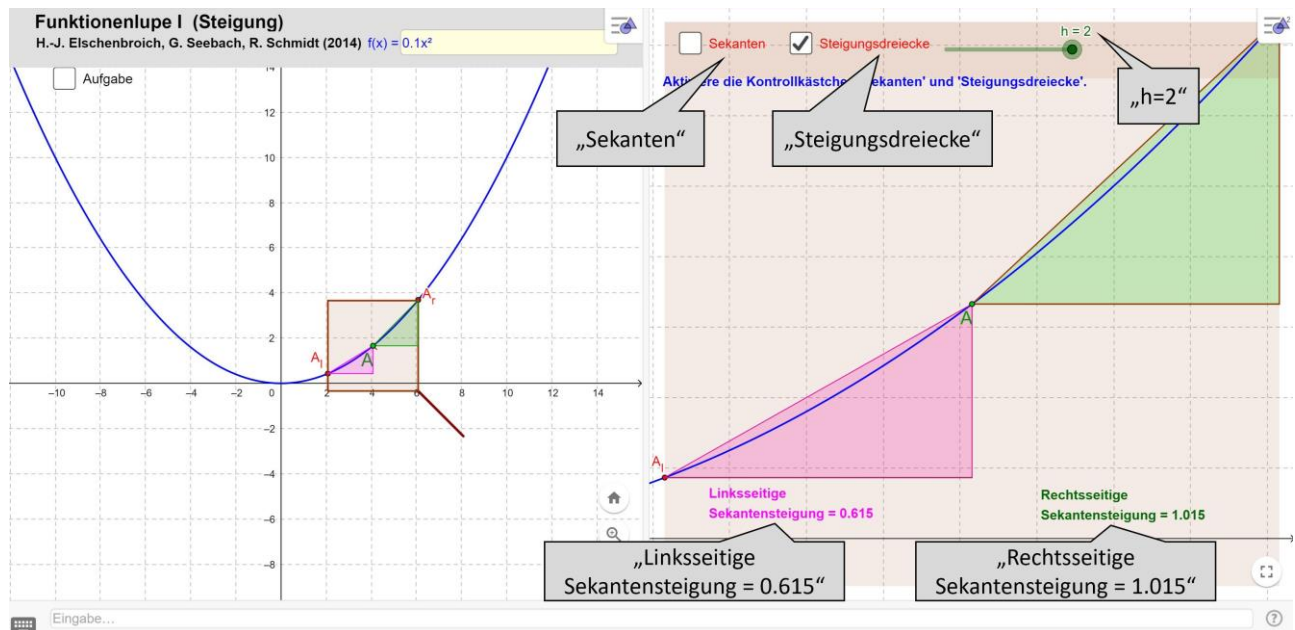


Abb. 4: Digitale Funktionenupe nach Elschenbroich et al. (2014) verändert durch Frederik Dilling (erstellt mit ©GeoGebra)

Seitenlänge $2h$ mit einem Schieberegler zwischen $h = 0,0001$ und $h = 2$ variiert werden kann. Im rechten Fenster werden das Quadrat und der Funktionsgraph im entsprechenden Ausschnitt vergrößert dargestellt. Zusätzlich lassen sich an den Ausschnitt angepasste links- und rechtsseitige Sekanten und Steigungsdreiecke sowie die zum Steigungsdreieck gehörenden Steigungswerte im rechten Fenster anzeigen (vgl. Elschenbroich et al., 2014). Die digitale Funktionenupe ermöglicht somit im Vergleich zum Funktionenmikroskop von Kirsch (1979) ein kleinschrittigeres Vergrößern des Funktionsgraphen, das Einfügen zusätzlicher Objekte (Steigungsdreiecke, Sekanten) und die numerische Angabe der Sekantensteigungswerte und sichert damit die Verbindung des graphischen Ansatzes mit dem schulischen Kalkül der h -Methode.

Im Rahmen der Fallstudie wurde eine vom Autor dieses Artikels leicht veränderte Version der Funktionenupe verwendet (siehe Abb. 4). Das linksseitige und das rechtsseitige Steigungsdreieck wurden in unterschiedlichen Farben markiert (rot und grün). Die jeweiligen Zahlenwerte der Steigung wurden in der entsprechenden Farbe gefärbt, sodass die Zuordnung deutlicher wird. Außerdem wurden die Steigungsdreiecke des rechten Fensters in angepasster Größe auch in das linke Fenster eingefügt. Die Sekanten wurden bei der Erhebung nicht angezeigt.

3.3 Schüler A

Zu Beginn des Interviews beschreibt Schüler A die Objekte des GeoGebra-Applets „Digitale Funktionenupe“. Dazu wurde zunächst die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = 0,5x$ eingegeben:

A: Also ich seh' erstmal ein Koordinatensystem. Das is' die Linie hier, das is' die x -Achse (zeigt auf die x -Achse). Das is' die y -Achse (zeigt auf die y -Achse) und durch den Nullpunkt verläuft eine Gerade, ein Graph, und an dem Graphen sind Steigungsdreiecke eingezeichnet. [...]

A: Ach so, ähm, ja, da sind die Steigungsdreiecke halt vergrößert. [...]

I: Ok. Und was is' das hier unten (zeigt auf die Steigungswerte)? [...]

A: Ich glaub' das sind die Werte, wie die Steigung is'. Also wie steil die Steigung quasi is'.

Bei der ersten Beschreibung der digitalen Funktionenupe beschränkt sich Schüler A auf die spezifischen Objekte des Applets – die Benutzeroberfläche von GeoGebra wird von dem Schüler nicht einbezogen. Die empirischen Begriffe Koordinatensystem, x -Achse, y -Achse, Graph, Gerade und Steigungsdreieck aus seiner mathematischen Theorie werden mit Objekten der Computerdarstellung in Beziehung gesetzt. Den Begriff der Funktion oder genauer der linearen Funktion verwendet der Schüler nicht – stattdessen wird der aus der Geometrie stammende Begriff der Geraden verwendet. Dies zeigt die Verankerung der Begriffe der Schülertheorie (*Conception*) in der Empirie – die begrenzte Linie im Koordinatensystem ist das empirische Referenzobjekt für den Begriff Gerade.

Die rechte Bildschirmhälfte wird von dem Schüler als Vergrößerung der linken Bildschirmhälfte wahrgenommen. Begründet wird diese Vermutung durch die jeweils größeren Steigungsdreiecke. Die gleichbleibende Dicke der Linie der Geraden wird vom Schüler nicht wahrgenommen und führt nicht zu einem Widerspruch. Dies kann dahingehend gedeutet werden, dass der Schüler mit dem Begriff der Gerade,

F. Dilling

bereits ein von der Linie idealisiertes Objekt verbindet.

Schließlich identifiziert der Schüler die zwei Zahlenwerte auf der rechten Bildschirmseite als Wert der Steigung der Geraden. Anschließend wird der Schüler gebeten den Schieberegler zu bedienen und die Variable h kleiner zu machen:

I: Ok. Versuch' mal hier an diesem Regler zu ziehen (zeigt auf Schieberegler).

A: Hier (macht h kleiner)?

I: Ja. Was passiert dann?

A: Dann wird's größer oder kleiner.

I: Ok. Und was gibt dieses h an? Hast du 'ne Idee?

A: Ähm, die Höhe?

I: Die Höhe von was?

A: Die Höhe von der Seite hier (zeigt auf die zur y -Achse parallele Steigungsdreiecksseite). Also die Steigung.

I: Das hier oben gibt die Steigung an oder was (zeigt auf Schieberegler)?

A: Ach so, ne, das, das is' die, ähm, die Größe von den Dreiecken.

Schüler A erkennt, dass das Verkleinern des Wertes h den betrachteten Bildschirmausschnitt kleiner macht, also der Abschnitt des Graphen im rechten Bildschirmteil vergrößert wird. Fragt der Interviewer konkret nach, was der Wert h angibt, so antwortet der Schüler zunächst, dass es sich um die Höhe des Dreiecks handelt. Der Schüler scheint einen subjektiven Erfahrungsbereich aktiviert zu haben, in dem der Buchstabe h mit der Höhe eines Dreiecks verbunden wird. Dies könnte auf die häufige Verwendung des Buchstabens h für eine Höhe im Dreieck zum Beispiel in Formeln in der Geometrie zurückgeführt werden. Die gemeinte Höhe ist dabei entsprechend der Geste des Schülers die auf dem Bildschirm vertikal dargestellte Achse. Die Länge dieser Dreiecksseite assoziiert der Schüler in einem zweiten Schritt mit der Steigung des Graphen. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass die Steigung mit einem Steigungsdreieck als Quotient der Länge der zur y -Achse parallelen Seite und der Länge der zur x -Achse parallelen Seite berechnet wird. Häufig wird im Unterricht letztere entsprechend der Einheit gewählt, sodass die Länge der y -Achse der Einheit entspricht. Bei erneuter Nachfrage durch den Interviewer verwirft der Schüler seine Hypothese über die Bedeutung des Wertes h allerdings wieder. Vermutlich hat er den Widerspruch zu einer seiner vorherigen Aussagen im Interview erkannt, dass eine Gerade überall die gleiche Steigung hat. Schließlich macht der Schüler die Aussage, dass der Wert h die Größe der Dreiecke angibt. Eine genauere Aussage wird durch den Schüler nicht getätigt.

Im Anschluss an diese Situation gibt der Interviewer an Stelle der Gleichung der linearen Funktion den

Funktionsterm $f(x) = 0,1x^2$ ein. Der Schüler erkennt eine Parabel und beschreibt, dass diese an unterschiedlichen Stellen eine unterschiedliche Steigung besitzt. Der Interviewer stellt dem Schüler die Frage, ob die Steigung an einer bestimmten Stelle bestimmt werden kann:

I: Ok. Und kann ich die denn auch an so 'ner Stelle bestimmen, zum Beispiel mit 'nem Steigungsdreieck?

A: Ja.

I: Wie geht das?

A: Ähm, indem man halt hier so'n Dreieck einzeichnet (zeichnet Dreieck mit dem Finger mit Nullpunkt als ein Eckpunkt). Also von dem Punkt zum Beispiel jetzt (zeichnet Dreieck erneut) zur 4 und dann nach oben.

I: Ok. Das würde ja hier auch so ähnlich gemacht, ne (zeigt auf Steigungsdreiecke)?

A: Mmh (bejahend).

I: Und da hast du zwei Steigungsdreiecke.

A: Genau.

I: Und wenn du jetzt mal guckst, sind die gleich, oder sind die anders, die Steigungsdreiecke?

A: Ne, die sind anders. Also die sind- Bei dem Graphen vorhin waren die ja gleich und hier sind die unterschiedlich.

I: Ok. Und welches is' jetzt richtig?

A: Beide sind richtig für ihre Position.

I: Ok. Aber an dem Punkt A (zeigt auf Punkt A), da kommen doch beide zusammen.

A: Ja.

I: Welches is' denn da jetzt richtig?

A: Ja das Pinke.

I: Das Pinke? Warum?

A: Weil die Spitze von dem Pinken bei A is' (zeigt auf Punkt A).

I: Ok. Die Spitze gibt immer an, wo die Steigung is'?

A: Genau.

I: Ok. Jetzt veränder' doch mal dieses h (zeigt den Schieberegler für h).

A: (verändert h).

I: Das Pinke verändert sich ja jetzt. Siehst du das?

A: Ja.

I: Was war denn jetzt richtig? Sind die alle richtig, oder is' da nur eins von richtig?

A: Ich glaube richtig wäre es, wenn das hier anfängt und von hier misst (zeigt auf den Nullpunkt).

Der neu dargestellte Funktionsgraph wird vom Schüler als Parabel und nicht als Graph einer quadratischen Funktion bezeichnet. Dies stützt die bereits formulierte Deutung, dass der Schüler insbesondere Begriffe aus der Geometrie verwendet und die dargestellten Objekte die Referenzobjekte seiner empirischen Theorie (*Conception*) sind.

Der Schüler behauptet im Weiteren, dass die Steigung der Parabel an einer Stelle mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmt werden könne. Als Beispiel nimmt er ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(4,0)$ und $(4,1.6)$, welches er mit dem Finger vor dem Bild-

schirm in die Luft malt. Mit dem als Beispiel gemalten Dreieck möchte der Schüler vermutlich die Steigung im Punkt (4,1.6) bestimmen. Dies kann durch die weiteren Aussagen gestützt werden. Auf die Frage hin, welches der im Programm dargestellten Dreiecke zur Bestimmung der Steigung im Punkt A geeignet ist, entscheidet er sich für das linke der beiden mit der Begründung, dass bei diesem der obere Eckpunkt in A liegt. Nach Verändern des Wertes h stellt der Schüler fest, dass dies auch für weitere Dreiecke der Fall ist. Schließlich behauptet der Schüler, das Steigungsdreieck müsse zusätzlich im Nullpunkt beginnen, entsprechend seines ursprünglich mit dem Finger gemalten Dreiecks.

Der Schüler hat sein Wissen über die geometrische Bestimmung der Steigung einer Geraden ohne Anpassungen auf die neue Situation übertragen. Während eine veränderte Größe des Steigungsdreiecks bei einer Geraden zum selben Ergebnis führt, entstehen bei einer gekrümmten Kurve zueinander nicht ähnliche Dreiecke und damit auch unterschiedliche berechnete Steigungswerte. Die Interpretation der neuen Situation scheint somit innerhalb des ursprünglichen subjektiven Erfahrungsbereichs erfolgt zu sein. Die Folge ist eine Ersatzkonstruktion zur Erklärung der Unstimmigkeiten, nämlich, dass das Steigungsdreieck immer einen Eckpunkt im Nullpunkt und einen im Punkt in dem die Steigung bestimmt wird haben muss (*Conception*).

In einer weiteren Interviewsituation soll der Schüler beschreiben, was passiert, wenn der Wert h ganz klein gemacht wird:

- I: Ok. Jetzt hab' ich mal 'ne Frage. Jetzt mach' mal das h ganz klein.
 A: (macht h klein).
 I: Was is' denn jetzt passiert?
 A: Ja, jetzt sieht man nichts mehr, weil die so klein sind.
 I: Ok. Und auf der rechten Seite?
 A: Jetzt sind die gleich. Ich denk' mal weil das so klein is', dass das nich' mehr entscheidend is'.
 I: Ok. Das heißt, wenn das klein is', is' das nich' mehr, sozusagen, dann zählt das nich' mehr? Dann muss groß genug sein, das Dreieck?
 A: Mmh (bejahend). Ich glaub' das muss mindestens eine Einheit hier sein (zeigt auf die x -Achse).

Schüler A sagt, dass die Dreiecke auf der rechten Bildschirmseite, nachdem der Wert h klein gemacht wurde, gleich sind. Gleichzeitig sieht er, dass die Dreiecke auf der linken Seite so klein geworden sind, dass sie nicht mehr zu erkennen sind. Dass die Dreiecke bei einer entsprechenden Vergrößerung augenscheinlich gleich sind, scheint bei dem Schüler zu einem kognitiven Konflikt zu führen. Diesen löst er, indem er an seiner ursprünglichen Ersatzhandlung festhält und das Verkleinern der Steigungsdreiecke als

unzulässig bezeichnet. Steigungsdreiecke müssen nach Auffassung des Schülers mindestens eine Einheit breit sein – ein Spezialgesetz, um die ursprüngliche Theorie (entsprechend eines normalwissenschaftlichen Vorgehens) aufrecht erhalten zu können (*Conception*). Dies kann so gedeutet werden, dass der Schüler bei einer kleineren Breite des Steigungsdreiecks im linken Bildschirmfenster keine Dreiecke mehr erkennen kann und damit auch keine visuelle Überprüfung der Aussagen vornehmen kann. Eine Begründung außerhalb der visuellen Wahrnehmung scheint von dem Schüler nicht akzeptiert zu werden. Dem Schüler kann in dieser Situation eine naiv-empirische Auffassung von Mathematik zugeschrieben werden, d.h. mit Schoenfeld (1985), dass logische Schlussfolgerungen auch zur Begründung des Wissens keine Rolle spielen.

3.4 Schüler B

Schüler B beschreibt zunächst ebenso wie Schüler A die zu sehenden Objekte der digitalen Funktionenlupe mit dem Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = 0,5x$:

- B: Also ich glaube die Linie is' n Graph (zeigt auf Graph der linearen Funktion), also 'ne Gerade. Das is' 'ne lineare Funktion. Und das is', ähm, das da sind die Steigungsdreiecke (zeigt auf die Steigungsdreiecke). Die, ähm, also die Funktionsgleichung is' $f(x) = mx + n$. Ähm, und m is' die Steigung und die kann man halt super mit dem Steigungsdreieck ausrechnen. [...]
 I: Und was is' das, was hier unten steht (zeigt auf Steigungswerte)? Hast du 'ne Idee?
 B: Die Sechs-Kant-Steigung? Die Sekantensteigung?
 I: Ja, dieser Wert? Was gibt der an?
 B: Achso, 0,5 is' die Steigung, glaub' ich dann. Also pro Zentimeter geht's, also hier glaub' ich 2 Zentimeter geht's 1 nach oben.
 I: Was meinst du denn wie das rechte Bild und das linke zusammenhängen?
 B: Also das rechte Bild is' diese kleine Stelle hier vergrößert (zeigt auf rotes Quadrat).
 I: Ok. Jetzt versuch' doch mal, hier an diesem Punkt oben zu ziehen, diesen Regler zu verändern (zeigt auf Regler für h).
 B: (zeigt auf Regler für h).
 I: Was passiert dann?
 B: Das Quadrat wird größer. Also es is' 'ne Vergrößerung.
 I: Ok. Was meinst du mit Vergrößerung?
 B: Also die Steigungsdreiecke werden größer und kleiner.

Der Schüler ordnet den Objekten der digitalen Funktionenlupe die empirischen Begriffe Graph, Gerade, lineare Funktion und Steigungsdreieck seiner empirischen Theorie (*Conception*) zu. Die Begriffe Graph, Gerade und lineare Funktion werden vom Schüler mit der gleichen Bedeutung verwendet, das empiri-

F. Dilling

sche Referenzobjekt ist jeweils die gezeichnete begrenzte Linie. Neben den Objekten und Begriffen selbst beschreibt der Schüler auch den Zusammenhang zwischen dem Steigungsdreieck und der Funktion. Dieses könne dafür verwendet werden, um die Steigung des Graphen zu bestimmen. Die Steigung wird vom Schüler wiederum als Faktor m in der Gleichung der linearen Funktion $f(x) = mx + n$ beschrieben. Der Zahlenwert im rechten Bild wird als Wert der Steigung identifiziert. Auf den Begriff des Koordinatensystems bezieht sich der Schüler nicht explizit.

Schließlich betätigt der Schüler den Schieberegler für den Wert h . Die Auswirkungen werden als Vergrößerung beschrieben. Dabei bezieht sich der Schüler zunächst auf das rot gefärbte Quadrat, bei genauerer Nachfrage auch auf die abgebildeten Steigungsdreiecke. Die gleichbleibend dicke Linie bei der Vergrößerung wird vom Schüler nicht angesprochen und vermutlich nicht explizit wahrgenommen. Dies könnte darauf hindeuten, dass der Schüler ein von der reinen Linie idealisiertes Konzept eines Graphen mit einer Ausdehnung lediglich in eine Dimension besitzt (*Conception*).

Im weiteren Verlauf des Interviews wird vom Interviewer die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 0,1x^2$ eingegeben. Es wird die Frage gestellt, ob auch hier eine Steigung bestimmt werden kann:

B: Ähm, also ich weiß jetzt nicht, ob man das da mit den Dreiecken ausrechnen kann. Ähm, weil die Steigung immer- Also wir haben erstmal, der Startpunkt ist hier glaub' ich wieder die 0. Und, ähm, wie man die Steigung da ausrechnet...

I: Hat die denn 'ne Steigung, die Parabel?

B: Ja, die wird halt immer, immer höher.

I: Immer mehr?

B: Ja, die is' halt nich' gleichmäßig, die Steigung.

I: Ok. Kann ich denn irgendwie an 'ner bestimmten Stelle die Steigung bestimmen? Zum Beispiel jetzt hier, wo wir sind, hier bei dem A (zeigt auf Punkt A)?

B: Nein, weil die halt oben und unten anders sind.

I: Aha, das heißt die Dreiecke sind irgendwie anders?

B: Mmh (bejahend).

I: Und warum sind die anders?

B: Also die Dreiecke sind, ähm, die sind ja rechtwinklig, glaub' ich. Ja, die sind rechtwinklig. Aber das is' ja rund (zeigt auf vergrößerten Graphen). Die Parabel is' ja rund und die Dreiecke haben 'ne Kante.

I: Ok. Jetzt versuchen wir mal was. Mach' mal wieder das mit diesem h .

B: (macht h kleiner).

I: Siehst du was passiert? Kannst du mal beschreiben, ob irgendwas sich verändert?

B: Also die passen sich halt genau der Parabel an, also der Linie.

I: Kannst du's nochmal genauer beschreiben, was da passiert?

B: Die bleiben halt genau auf der Linie und passen halt nich' genau aufeinander, weil das eine rund is' (zeigt auf vergrößerten Graphen).

I: Ok. Und jetzt mach' mal noch weiter.

B: (macht h kleiner). Ja, irgendwann sind die genau auf der Linie. [...]

I: Wir haben ja jetzt ganz nah ran gezoomt. Können wir jetzt an der Stelle, wo wir ran gezoomt haben, die Steigung bestimmen, oder nich'?? [...]

B: Ja, ich glaub' schon.

I: Das würde so funktionieren?

B: Denke ich schon. Weil es wär' ja dann nich' die ganze Parabel. Es wär' ja dann nur dieses eine kleine Stück.

I: Ok. Nur für dieses eine kleine Stück. Aber dann is' es jetzt genau? Oder fehlt da noch was?

B: Ne, ich glaub' nich'.

Der Schüler identifiziert den Graphen der Funktion als Parabel. Bei dieser sei die Steigung nicht gleichmäßig und werde mit Abstand vom Ursprung immer größer. Auf die Frage hin, ob man denn die Steigung an einer Stelle mit einem Steigungsdreieck bestimmen kann, antwortet der Schüler mit nein. Er begründet seine Antwort damit, dass die beiden dargestellten Steigungsdreiecke nicht gleich sind, da die Parabel rund sei, die Dreiecke aber eine Kante haben. Was der Schüler mit dieser Aussage vermutlich meint ist, dass die Dreiecke eine gerade Seite haben, die Parabel aber gekrümmt ist. Entsprechend sind die Steigungsdreiecke nicht kongruent zueinander und damit die Steigung nicht eindeutig mit den Dreiecken bestimmbar. Der Schüler erkennt die Grenzen seiner ursprünglichen Theorie und wendet diese daher nicht auf den Fall der Parabel an (*Conception*).

Auf Anweisung des Interviewers verkleinert der Schüler schließlich den Wert h mit dem Schieberegler. Er beschreibt, dass sich die Steigungsdreiecke an die Parabel anschmiegen, allerdings nicht genau aufeinanderpassen, da die Parabel rund sei. Der Schüler hat von sich heraus nicht das Bedürfnis, den Wert h noch kleiner zu machen – er scheint an seiner Behauptung festhalten zu wollen, dass sich die Steigung nicht mit Dreiecken bestimmen lässt. Der Interviewer ermutigt den Schüler deshalb den Wert h so klein wie mit dem Schieberegler möglich zu machen. Der Schüler stellt fest, dass die Steigungsdreiecke nun „genau auf der Linie liegen“. Mit diesen Steigungsdreiecken könne man die Steigung exakt bestimmen. Der Schüler verwirft somit seine ursprüngliche Behauptung und erweitert damit seine empirische Theorie. Bei der Begründung stützt er sich rein auf die visuelle Wahrnehmung der empirischen Objekte Parabel und Steigungsdreiecke. Sobald die Linien beider Objekte augenscheinlich aufeinanderliegen, wird die ursprüngliche Behauptung verworfen. Weitere theoretische Überlegungen finden nicht statt, wes-

halb sich diese Form der Begründung als naiv-empirisch im Sinne von Schoenfeld (1985) beschreiben lässt. Bei dem Begriff der lokalen Linearität handelt es sich allerdings im Sinne des intersubjektiv geteilten mathematischen Wissens um einen theoretischen Begriff bedingt durch die Einführung des Grenzwertes. Der Schüler erfasst ihn aber als empirischen Begriff – die Linearität kann in endlich vielen Schritten erreicht werden. Die Bestimmung der Steigung der Parabel in einem Punkt ist nach Auffassung des Schülers mit einem gezeichneten Steigungsdreieck exakt möglich (*Conception*).

Gegen Ende des Interviews gibt der Interviewer die Funktionsgleichung $f(x) = |x|$ ein. Der Schüler wird gefragt, ob die Steigung mit der Methode auch im Nullpunkt bestimmt werden kann:

I: Ganz unten in der Ecke. Wenn ich jetzt genau in die Ecke gehe. Wollen wir's mal versuchen? (verschiebt den Punkt A in den Nullpunkt) Was passiert denn da?

B: Das is' einmal die Steigung und die Steigung (zeigt auf die vergrößerten Steigungsdreiecke).

I: Die sind anders. Und wenn wir jetzt ganz nah rangehen? Was meinst du würde passieren?

B: Wir würd' einfach immer kleiner werden. Das würd' aber dann genau so aussehen (zeigt auf die vergrößerten Steigungsdreiecke).

I: Ach so, aber nur kleiner? Versuch's doch mal.

B: (macht h kleiner). [...]

I: Und wenn wir jetzt noch kleiner werden? Hilft es denn irgendwann?

B: Ne. Ich würd' sagen das bleibt immer gleich.

I: Ok. Also können wir da die Steigung bestimmen, in der 0? Und wie is' die? [...]

B: Also ich würd' sagen bis zur Linie is' es links -1 und rechts +1 (zeigt auf die y-Achse).

I: Ja, und genau auf der Linie?

B: (lacht).

I: Kann man die da bestimmen?

B: Ich glaub' nich'.

Der Schüler beschreibt, dass die Steigung links von der y-Achse durch das linke Steigungsdreieck und rechts von der y-Achse durch das rechte Steigungsdreieck bestimmt werden kann. Der Schüler stellt die Hypothese auf, dass ein Verkleinern des Wertes h keine Änderung hervorrufen würde, das würde „genau so aussehen“. Der Schüler scheint somit zu erkennen, dass die Steigungsdreiecke zwar kleiner werden, aber ähnlich zueinander sind und damit die gleiche Steigung berechnet werden würde. Er scheint sein Wissen über lineare Funktionen anzuwenden. Der Schüler bestätigt seine Hypothese durch Betätigen des Schiebereglers nach Ermutigung durch den Interviewer. Auf die Frage hin, ob ein weiteres Vergrößern Änderungen hervorruft antwortet der Schüler mit nein. Er scheint eine Systematik in der Vergrößerung des Graphen erkannt zu haben, die auf die Linearität außerhalb des Nullpunktes zurückgeführt

werden kann. Er scheint seinen subjektiven Erfahrungsbereich zu linearen Funktionen zu aktivieren, wodurch sein bereits im Interview geäußertes Wissen über die an jeder Stelle gleiche Steigung anwendbar wird. Damit hat er am konkreten Fall der Betragsfunktion den Begriff der Nicht-Differenzierbarkeit in einer ersten Fassung als theoretischen Begriff entwickelt (*Conception*). Er bezieht theoretische Überlegungen mit ein, denn durch das empirische Arbeiten mit der Funktionenlupe, die nur ein endliches Vergrößern des Graphen möglich macht, kann die Frage nicht beantwortet werden.

3.5 Ergebnisdiskussion

Die Beschreibung der Fallstudie mit den zwei Schülern auf der Basis der Begrifflichkeiten des CSC-Modells konnte zeigen, dass Wissensentwicklungsprozesse auf der Basis von empirischen Settings individuelle Prozesse darstellen, die je nach interpretierendem Subjekt unterschiedlich ausfallen können. Beide Schüler scheinen eine empirische Auffassung von Mathematik zu haben, bei der sich die Begriffe ihrer Theorie auf empirische Referenzobjekte beziehen. Sie stützen ihre Behauptungen vielfach auf der Grundlage des empirischen Settings. Schüler B bezieht zusätzlich auch theoretische Überlegungen mit ein.

Die digitale Funktionenlupe führt bei den beiden Schülern dennoch zu sehr unterschiedlichen Entwicklungen der eigenen Theorie (*Conceptions*). Schüler A stellt verschiedene Unstimmigkeiten zwischen der eigenen Theorie und dem empirischen Setting fest und entwickelt eine Ersatzkonstruktion zur Beschreibung dieser Unstimmigkeiten. Dies entspricht einem normalwissenschaftlichen Vorgehen im wissenschaftstheoretischen Sinne nach Kuhn (1967). Die Idee der Vergrößerung des Funktionsgraphen wird dabei nicht in die eigene Theorie aufgenommen und als unzulässig erklärt. Dieser Aspekt des empirischen Settings wird vom Schüler nicht in die Theorie eingebunden. Schüler B hingegen entwickelt seine mathematische Theorie mit dem empirischen Setting weiter und bindet die Idee der Vergrößerung von Graphenabschnitten ein. Es scheinen auf der begrifflichen Ebene genügend Übereinstimmungen mit der eigenen mathematischen Theorie zu existieren, sodass es in diese eingebunden wird.

Die mit dem CSC-Modell beschreibbaren Vorstellungen der Lernenden in Bezug auf konkrete empirische Settings können wichtige Informationen für die Entwicklung solcher Settings wie auch für deren Einsatz im Unterricht bereitstellen. So kann beispielsweise Schüler A aus der Fallstudie bei seiner Wissensentwicklung gezielt unterstützt werden, indem

F. Dilling

mögliche Probleme seiner Ersatzkonstruktion aufgezeigt und alternative Interpretationen des Settings angeboten werden. Aushandlungsprozesse zwischen Schülerinnen und Schülern und der Lehrpersonen können zu als geteilt geltenden Interpretationen führen. Eine Herausforderung bleibt in diesem Zusammenhang allerdings die Bereichsspezifität des Wissens, die unter anderem zu Missverständnissen in der Kommunikation zwischen den beteiligten Personen führen kann.

Die (weiter)entwickelten Theorien (*Conceptions*) beider Schüler unterscheiden sich voneinander, aber auch von den durch die Entwickler intendierten Anwendungen der Funktionenlupe, basierend auf dem intersubjektiv als korrekt betrachteten eingebrachten Wissen (*Concept*). Dieses kann insbesondere auf der Grundlage der mathematikdidaktischen Veröffentlichungen zur digitalen Funktionenlupe rekonstruiert werden. Die Individualität von Wissensentwicklungsprozessen und den entstehenden Theorien werden durch das CSC-Modell gezielt in den Blick genommen und konnten auf dieser Grundlage im konkreten Fall adäquat beschrieben werden.

4. Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag wurde ein Ansatz zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen mit empirischen Settings vorgestellt. Dieser basiert auf der Annahme, dass das von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht entwickelte Wissen in empirischen Theorien beschrieben werden kann – sie bilden eine empirische Auffassung von Mathematik. Im Sinne des Konstruktivismus erfolgt Lernen und die Entwicklung von Wissen auf der Grundlage von individuellen Erfahrungen. Diese werden grundsätzlich in einem bestimmten Kontext gemacht und an diesen gebunden in sogenannten subjektiven Erfahrungsbereichen gespeichert.

Die Auffassung von Mathematik und die in subjektiven Erfahrungsbereichen gespeicherte empirische mathematische Schülertheorie bestimmen, wie ein Setting zur Wissensentwicklung genutzt wird. Ein Entwickler bzw. Auswählender eines Settings intendiert eine bestimmte Interpretation dieses Settings. Das Setting steht dabei mit der von der mathematischen Gemeinschaft entwickelten Theorie (*Concept*) in einer Original-Modell-Beziehung. Lernende, die das empirische Setting im Unterricht nutzen, interpretieren dieses auf der Grundlage ihrer empirischen mathematischen Theorie unter Umständen anders und entwickeln entsprechend ihre empirische mathematische Theorie auf Grundlage dieser Interpretation weiter (*Conception*). Das Verhältnis zwischen Theorie und Setting kann auch in diesem Fall als Original-Modell-Beziehung gedeutet werden.

Das sogenannte CSC-Modell wurde anschließend exemplarisch zur Analyse von zwei Schülerinterviews angewendet. Das hierbei untersuchte empirische Setting war durch das GeoGebra-Applet „digitale Funktionenlupe“ gegeben. Es konnte gezeigt werden, dass das CSC-Modell zur adäquaten Beschreibung der individuellen Entwicklungen des mathematischen Wissens im Rahmen der konkreten Fallstudie geeignet ist. Es kann insbesondere als deskriptives Modell zur Untersuchung von initiierten Wissensentwicklungsprozessen in einem empirisch-gegenständlichen Zusammenhang herangezogen werden. Dabei wird anders als bei sonst üblichen Modellen (z. B. semiotischen Ansätzen) nicht die Form der Darstellung in den Blick genommen, sondern vielmehr die Beziehung zwischen Begriffen und empirischen Objekten. In einzelnen Aspekten lassen sich Ähnlichkeiten zu klassischen Sender-Empfänger-Modellen der Kommunikation feststellen, wobei bei empirischen Settings im Rahmen des CSC-Modells nicht der sprachliche Charakter im Vordergrund steht und das Modell stattdessen die individuellen Erfahrungen der einzelnen Personen betont. Das CSC-Modell kann dabei die Einbindung eines empirischen Settings in die Theorien verschiedener Personen oder Personengruppen zusammenführen. Weitere Untersuchungen müssen jedoch gezielt zeigen, wie das Modell im Verhältnis zu anderen Theoriekonzepten steht, wie weitreichend es anwendbar ist und welche Schlussfolgerungen sich aus diesem für das Lehren und Lernen von Mathematik ziehen lassen.

Anmerkungen

¹ Mit Graph wird im Folgenden das Bild des Graphen in der Zeichenebene bezeichnet.

² Definition der Blancmange Funktion: $blanc(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n}$ mit $s(x) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$

Literatur

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik: Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1–56). Köln: Aulis.
- Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68.
- Brown, J. S., Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32–41.
- Burscheid, H. J. & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktion: Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23(7), 13–20.
- Dilling, F., Pielsticker, F. & Witzke, I. (2019, online first). Grundvorstellungen Funktionalen Denkens handlungsorientiert ausschärfen – Eine Interviewstudie zum Umgang von Schülerinnen und Schülern mit haptischen Modellen von Funktionsgraphen. *Mathematica Didactica*.
- Dilling, F. & Witzke, I. (2020, online first). The Use of 3D-printing Technology in Calculus Education – Concept formation processes of the concept of derivative with printed graphs of functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*.
- Elschenbroich, H.-J., Seebach, G. & Schmidt, R. (2014). Die digitale Funktionenlupe: Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Mathematik Lehren*, 187, 34–37.
- Elschenbroich, H.-J. (2015). Anschauliche Differenzialrechnung mit der Funktionenlupe. *MNU Journal*, 68(5), 273–277.
- Ginsburg, H. (1981). The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 4–11.
- Gopnik, A. & Meltzoff, A. N. (1997). *Words, Thoughts and Theories*. Cambridge: MIT-Press.
- Griesel, H., Gundlach, A., Postel, H. & Suhr, F. (2010). *Elemente der Mathematik Einführungsphase*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.
- Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(1), 3–45.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 15–24). Wiesbaden: Springer.
- Jahnke, H. N. (1989). Abstrakte Anschauung. Geschichte und didaktische Bedeutung. In H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen* (S. 33–53). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Kirsch, A. (1979). Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Der Mathematikunterricht*, 25(1), 25–41.
- Kirsch, A. (1980). *Folien zur Analysis. Serie A*. Hannover: Schroedel.
- Kirsch, A. (1995). Pathologische Funktionen unter dem "Funktionenmikroskop". *Didaktik der Mathematik*, 1, 18–28.
- Kuhn, Th. S. (1967). *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Maier, H. & Voigt, J. (Hrsg.) (1991). Interpretative Unterrichtsforschung. Untersuchungen zum Mathematikunterricht. Köln: Aulis-Verlag.
- Núñez, R. E., Edwards, L. D. & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 45–65.
- Pehkonen, E. & Pietilä, A. (2004). On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *European Research in Mathematics Education III: Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria: University of Pisa and ERME.
- Philipp, R. (2007). Mathematics Teacher's Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 257–315). Charlotte: Information Age.
- Pielsticker, F. (2020). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht am Beispiel der 3D-Druck-Technologie*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. *New Trends in mathematics teaching, IV*, 232–248.
- Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
- Rott, B., Leuders, T. & Stahl, E. (2015). Assessment of Mathematical Competencies and Epistemic Cognition of Pre-Service Teachers. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 39–46.
- Scheffler, I. (1965). *Conditions of Knowledge. An Introduction to Epistemology and Education*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Sneed, J. D. (1971). *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht: Reidel.
- Stachowiak, H. (1973). *Allgemeine Modelltheorie*. Wien: Springer.
- Stoffels, G. (2020, erscheint). *(Re-)konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung*. Siegen: Universitätsverlag.
- Tall, D. (1980). Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes. *The Mathematical Gazette*, 64(427), 22–49.
- Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. *Visualization in Mathematics*, 19, 105–119.
- Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to

F. Dilling

- Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 127–146). New York: Macmillan.
- Tiedemann, K. (2016). „Ich habe mir einfach die Rechenmaschine in meinen Kopf gebaut!“ Zur Entwicklung fachsprachlicher Fähigkeiten bei Grundschulkindern. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 581–584). Münster: WTM-Verlag.
- Törner, G. & Grigutsch, S. 1994. Mathematische Weltbilder bei Studienanfängern – eine Erhebung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 15 (3/4), 211–251.
- Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345–364.
- Witzke, I. (2009). *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus: Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Witzke, I. (2014). Zur Problematik der empirisch gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes. *Der Mathematikunterricht*, 60(2), 19–32.
- Witzke, I. & Spies, S. (2016). Domain-Specific Beliefs of School Calculus. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 131–161.

Anschrift des Verfassers

Frederik Dilling
Universität Siegen
Didaktik der Mathematik
Herrengarten 3
57072 Siegen
dilling@mathematik.uni-siegen.de