Diagramme reflektieren – Lehren, Lernen, Forschen in der LernWerkstatt Mathematik der JLU Gießen

KATJA LENGNINK, GIEßEN & LENA K. ECKHARDT, GIEßEN

***Zusammenfassung**: Die Arbeit in universitären Lehr-Lern-Laboren ermöglicht, dass Schülerinnen und Schüler gemeinsam an einem Thema arbeiten, Studierende dies zunehmend professionell begleiten und Forscherinnen und Forscher die Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern und auch von Studierenden untersuchen. Dies wird durch das reichhaltige Gewinnen von Daten (etwa Eigenproduktionen sowie Video- und Audiodaten zu Bearbeitungsprozessen) gestützt. Aufbereitete Vignetten aus den Bearbeitungsprozessen und -produkten können zum Zweck der Lehrerprofessionalisierung auch wiederum Ausgangspunkt des Lernens (z. B. im Rahmen diagnostischer Betrachtungen) werden. Im vorliegenden Text wird dieser Zyklus von Lehren (der Studierenden), Lernen (der Schülerinnen und Schüler) und Forschen am Thema des Reflektierens von Diagrammen entfaltet. Dabei werden Forschungserkenntnisse über die Zugänge und Hürden beim Reflektieren über Mathematik gewonnen und Konsequenzen für die Lehrerbildung gezogen.*

***Abstract:** Settings in university teaching-learning laboratories enable school students to work on a topic collaboratively, while, at the same time, preservice teachers are facilitated to supervise the pupils' working in an increasingly professional manner. Eventually, researchers can examine the respective learning processes of both the school students as well as the university students using the rich amount of data gained, for example, in the form of written products as well as video and audio formats focusing on the students' working processes. Based on this data, vignettes can be provided in order to professionalize preservice teachers by learning through diagnostic considerations. This text focuses on the cycle of teaching (preservice teachers), learning (students) and researching employing the reflecting on diagrams. Thus, insights into approaches and challenges which occur while reflecting on mathematics can be gained and conclusions for preservice teacher training can be drawn.*

1. Einleitung

Diagramme sind in unserer Welt allgegenwärtig. Sie dienen in der Regel dazu, Wesentliches sichtbar zu machen und die Flut der Daten zu reduzieren, um begründet Entscheidungen treffen zu können. Allerdings bedarf es einer großen, in Teilen auch mathematischen Kompetenz, diese richtig lesen und angemessen interpretieren zu können. Die Fähigkeiten, die dabei relevant sind, gehen über ein rein operatives Mathematiktreiben hinaus. Vielmehr wird hierfür ein Nachdenken über Mathematik und ihren Einsatz benötigt, das zum einen im Klären der Datenlage sowie der Richtigkeit und Angemessenheit der Darstellung liegt, zum anderen die mit der Darstellung verfolgten Zwecke hinterfragt. Der Umgang mit Diagrammen benötigt demnach eine Reflexionskompetenz über den Einsatz von Mathematik in der Welt, die im schulischen Mathematikunterricht gezielt gefördert werden sollte.

Das Anliegen, verstärkt solche Reflexionsprozesse in den Mathematikunterricht zu integrieren, wird bereits seit vielen Jahren in der mathematikdidaktischen Forschung diskutiert (vgl. etwa Bauer, 1990; Neubrand, 1990; Skovsmose, 1989, 1994, 1998, 2006; Fischer, 1984, 2001; Peschek, 1997, 2005, 2006; Lengnink, 2004, 2005; Schmitt, 2017). Für die lerntheoretische Perspektive der Debatte ist dies mit Ansätzen zur Metakognition und zur Reflexion von Strategien beim mathematischen Problemlösen (vgl. etwa Kaune, 1999; Sjuts, 2001, 2003, 2006) bereits in Teilen in gängigen Schulbüchern repräsentiert. Im Kontrast dazu hat sich der Mathematikunterricht aus bildungstheoretischer Perspektive bisher kaum verändert. Eine Reflexion der Darstellung von Daten in Form von Diagrammen und das Erarbeiten einer kritischen Haltung gegenüber diesen Darstellungen findet nach wie vor nur selten im Unterricht statt. Eine Ausnahme stellt das Schulbuch *mathe live* dar, in dem in Exkursen auch Darstellungen von Daten in Diagrammen und ihre manipulativen Effekte thematisiert werden (s. etwa *mathe live 8*, 2017, S. 170).

Es stellen sich somit die Fragen, wie Lernanlässe zum Reflektieren von Diagrammen für Schülerinnen und Schüler gestaltet werden müssen, um einen kritischen Umgang mit Diagrammen anzuregen, und wie dieser Prozess durch (zukünftige) Lehrkräfte begleitet werden kann. Diesen Fragen wurde im Rahmen der LernWerkstatt Mathematik der JLU Gießen nachgegangen.

Die LernWerkstatt Mathematik ist ein Ort, an dem Schülerinnen und Schüler an einem Thema arbeiten, Studierende dies zunehmend professionell begleiten und in Forschungsprojekten die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler sowie der Studierenden untersucht werden. Sie verfolgt damit die für Lehr-Lern-Labore beschriebenen Ziele,

- durch den Besuch eines außerschulischen Lernortes „das Interesse von Schülerinnen und Schülern an Mathematik zu wecken und/oder zu fördern sowie mathematisches Denken und Arbeiten authentisch erlebbar zu machen“ (Lengnink & Roth, 2016, S. 1267),
- „eine theorie- und forschungsbasierte sowie praxisnahe Ausbildung von Lehramtsstudierenden mit dem Fach Mathematik“ (ebd.) zu ermöglichen und
- als Forschungsumgebung für mathematikdidaktische „empirische Forschung im Sinne einer zyklischen fachdidaktischen Entwicklungsforschung“ (ebd.) zu dienen.

Somit stellt die LernWerkstatt Mathematik einen idealen Ort dar, um einen Prozess des Lehrens, Lernens und Forschens in Bezug auf das Reflektieren von Diagrammen zu initiieren:

(1) Als Ausgangspunkt unserer Arbeit diente ein Schülerbesuch in der LernWerkstatt, in dessen Rahmen die Schülerinnen und Schüler aufgefordert wurden, Diagramme und ihre Nutzung zu reflektieren. Anhand von Videoaufzeichnungen und Eigenproduktionen wurden Einblicke in die Denk- und Arbeitsweisen von Schülerinnen und Schülern gewonnen und typische Schwierigkeiten im oben genannten Themenfeld ausgemacht.

(2) Aus den Schülerdaten wurden im Anschluss Vignetten für universitäre Lehrveranstaltungen aufbereitet und in Vorlesungen und Übungen zum Aufbau von diagnostischer Kompetenz genutzt (v. Aufschnaiter, Selter & Michaelis, 2017). In den Bearbeitungen der Vignetten fiel zunächst auf, dass das Reflektieren über den Umgang mit Diagrammen für die Studierenden selbst eine Herausforderung darstellte. Daher wurden auch den Studierenden Reflexionsaufträge zum Thema „Umgang mit Diagrammen“ gestellt und im Rahmen von Hausaufgaben und Übungsphasen Audiodaten und Eigenproduktionen in der Auseinandersetzung mit den Arbeitsaufträgen erhoben. Auch in diesen Aufgabenbearbeitungen wurden spezifische Schwierigkeiten, aber auch vorhandene Kompetenzen der Studierenden sichtbar.

(3) Basierend auf den Untersuchungsergebnissen wurden Materialien entworfen, die zukünftigen Lehrkräften helfen sollen, zunächst selbst professionell über den Umgang mit Diagrammen reflektieren zu können. Diese werden derzeit (im Wintersemester 2018/2019) in der Vorlesung „Ausgewählte Fragen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I“ eingesetzt. Im Anschluss daran werden die Studierenden in der Vorlesung durch den Einsatz von Videovignetten für die Lernbegleitung im reflexionsorientierten Unterricht professionalisiert.

(4) Nach dieser Vorbereitung durch die Vorlesung ist geplant, Seminare mit Schulklassenbesuch zum Thema „Umgang mit Diagrammen“ in der LernWerkstatt abzuhalten. In diesem Rahmen planen die Studierenden eigenständig Vormittage für Schülerinnen und Schüler, führen diese durch und evaluieren sie anschließend. Durch Videographie der Schülervormittage ergeben sich für die Forschung und universitäre Lehre erneut Möglichkeiten, die Lernbegleitung im Hinblick auf das Reflektieren von Diagrammen zu thematisieren und hierzu Lernanlässe und Zugänge herauszuarbeiten.

In der vorliegenden Arbeit werden die Schritte (1) und (2) ins Zentrum gestellt. Hierbei werden Zugänge zum Reflektieren von Studierenden sowie von Schülerinnen und Schülern anhand der erhobenen Daten herausgearbeitet und verglichen. Auf dieser Basis können sowohl Anknüpfungspunkte für eine Förderung der Studierenden als auch der Schülerinnen und Schüler formuliert werden (3). Die Durchführung eines erneuten Lernwerkstattbesuchs (4) kann auf dieser Grundlage geplant werden, wird aber im Rahmen dieses Artikels nicht mehr thematisiert.

Im Theorieteil des Textes wird zunächst der Forschungsstand zum Reflektieren im Mathematikunterricht aus bildungstheoretischer Perspektive aufgearbeitet und auf die Forschung zur statistischen Grundbildung im Umgang mit Diagrammen bezogen. Danach wird das Untersuchungsdesign beschrieben sowie exemplarisch ein reflexionsorientierter Arbeitsauftrag vorgestellt, der aus Sicht der Theorie analysiert wird. Der in der Untersuchung verfolgte Ansatz zur Nutzung der LernWerkstatt wird dabei in Konzepte der Arbeit in Lehr-Lern-Laboren eingeordnet. Die Untersuchungsergebnisse der beiden Datenerhebungen mit Studierenden und Schülerinnen und Schülern werden in einem dritten Teil dargestellt, um viertens daraus Konsequenzen für einen weiteren Lernzirkel in der LernWerkstatt zu ziehen. Mit einem Fazit im Hinblick auf die bereits gewonnenen Erkenntnisse und offene Forschungsfragen schließt die Arbeit ab.

2. Mathematische Bildung und Reflexion

2.1 Bildungstheoretische Ansätze zum reflexionsorientierten Mathematikunterricht

Mathematik ist in unserer heutigen Gesellschaft allgegenwärtig: Es werden Besteuerungssysteme mit mathematischen Modellen normativ gesetzt, Rentenformeln aufgestellt und angepasst, Prognosen zur Klimaerwärmung und zur Entwicklung von Feinstaub berechnet, etc. In vielen dieser Bereiche spielen Darstellungen von Daten mithilfe von Diagrammen eine wichtige Rolle. Aus bildungstheoretischer Sicht stellt sich daher die Frage, wie mathematische Bildung zur Beherrschung von Mathematik und insbesondere zum reflektierten Umgang mit Diagrammen beitragen kann.

Diese Frage wird in der Mathematikdidaktik seit mehr als 30 Jahren diskutiert. So sprach Roland Fischer bereits 1984 von „Mathematischer Bildung als Befreiung vom Gegenstand“ (Fischer, 1984) und Hans Werner Heymann stellte den „kritischen Vernunftgebrauch“ als eine wesentliche Aufgabe mathematischer Allgemeinbildung heraus (Heymann, 1996). In der Forschungsrichtung der Critical Mathematics Education (CME) spricht Ole Skovsmose von der „formatting power of mathematics“ (Skovsmose, 1998, S. 197). Er vertritt die Ansicht, dass Mathematik unsere Gesellschaft weitreichend beeinflusst (formatiert) und dass der Mathematikunterricht „critical readers of the formatting“ (ebd.) heranbilden muss. Im Anschluss daran spricht Lengnink (2005) vom Mündigwerden durch und gegenüber Mathematik. Sie betont damit, dass Mathematik auch dazu beitragen kann, mündig zu werden, indem mit ihrer Hilfe Sachverhalte beispielsweise durch die Erhebung und Darstellung von Daten in Diagrammen transparenter gemacht werden können. Man muss sich jedoch stets auch der Grenzen dieser mathematischen Beschreibungen und möglicher Fehldeutungen sowie Manipulationen der verwendeten Darstellungen bewusst sein.

Die oben genannten Ansätze haben gemeinsam, dass sie Schülerinnen und Schüler zu einer mündigen Teilhabe an unserer mathematisch geprägten Gesellschaft befähigen wollen. Um eine solche Mündigkeit im Umgang mit Mathematik und insbesondere mit Diagrammen zu fördern, reicht ein rein operatives Umgehen damit nicht aus. Dieses kann häufig an einen Experten oder sogar an den Taschenrechner ausgelagert werden. Vielmehr muss Mathematik in ihren Sinngebungen, Bedeutungen und Bedingungen gelernt werden, wie es die Allgemeine Mathematik fordert (Wille, 2001). Dafür sind Reflexionsprozesse nötig, die über den Erwerb von reinem Wissen hinaus auf die Einordnung des Wissens und die Möglichkeiten und Grenzen des Gebrauchs von Mathematik fokussieren (Fischer, 2001). Roland Fischer bemüht hierbei das Bildungsziel der Kommunikationsfähigkeit: Er versteht diese als die Fähigkeit und den Willen zur Kommunikation von höher allgemeingebildeten Laien im Spannungsfeld von Experten und Allgemeinheit. Höher allgemeingebildete Laien haben in diesem Konzept vor allem über ein Grundwissen und über eine Reflexionsfähigkeit zu verfügen, die es ihnen ermöglicht, Expertisen einzuholen, diese (kritisch) zu lesen und ihren Beitrag zur Klärung eines Sachverhaltes zu beurteilen sowie diese Erkenntnisse einer Allgemeinheit mitzuteilen. Fischer verwendet zur Verdeutlichung das Bild eines Richters, der Expertengutachten einholt und diese für seine Urteilsfindung einordnen und auswerten muss.

Demnach stellt das Reflektieren eine wesentliche Denkhandlung dar, die sich auf das Nachdenken über den (mathematischen) Gegenstand (mathematisch orientierte Reflexion), seine angemessene Verwendung (modellorientierte Reflexion), die damit verbundenen Zwecke (kontextorientierte Reflexion) und die Bedeutung für die eigene Lebenswelt (lebensweltorientierte Reflexion) beziehen kann (vgl. Skovsmose, 1998; Peschek, Prediger & Schneider, 2008). Diese unterschiedlichen Reflexionsebenen helfen, einen Perspektivenreichtum in der Auseinandersetzung mit einem mathematischen Gegenstand und seiner Verwendung zu entwickeln.

Obwohl der theoretische Anspruch bereits mehr als 20 Jahre alt ist und in der Folge einige unterrichtspraktische Vorschläge unterbreitet wurden, sind bis heute kaum Reflexionsanlässe in Schulbüchern und Lernmaterialien zu finden, die auf eine Kritikfähigkeit im Umgang mit Mathematik abzielen (s. oben). Möglicherweise liegt dies daran, dass mit diesem Anspruch eine Änderung der Einstellung und Haltung zur Mathematik selbst und auch zum Lehren und Lernen derselben verbunden ist: Die lieb gewordene Gewohnheit des weitgehenden Einübens von Rechenverfahren und somit die Eindeutigkeit des Mathematikunterrichts würden dadurch in Frage gestellt. Es kann aber auch sein, dass ein Einsatz von Reflexionsanlässen im Unterricht sich als zu schwierig für die Lernenden erweist, schließlich verorten die Bildungsstandards Reflexion im Anforderungsniveau III (KMK, 2003, S. 13; KMK, 2012, S. 15). Möglich ist auch, dass die Lehrkräfte nicht genügend darin ausgebildet sind, Reflexionsprozesse geeignet zu unterstützen. Es lassen sich derzeit nur Mutmaßungen anstellen. Systematische Untersuchungen zum Einsatz reflexionsorientierter Aufgaben im Mathematikunterricht der Sekundarstufen und in der Lehrerbildung für diese Schulformen liegen bislang nicht vor.

Wie ein solcher Kompetenzerwerb gestaltet und begleitet werden kann, stellt demnach ein Forschungsdesiderat dar.

2.2 Statistische Grundbildung und Reflexion

In der öffentlichen Debatte finden sich vermehrt Stimmen, die zeigen, dass es um die statistische Grundbildung schlecht bestellt ist. Nur wenige Bürgerinnen und Bürger können Daten und ihre Darstellungen angemessen interpretieren. Sie stehen somit einer Nutzung ohnmächtig gegenüber, wie etwa die ARD-Dokumentation „Im Land der Lügen“ (Achtnich, 2016) oder die ZEIT-Ausgabe „Lügen nach Zahlen“ (DIE ZEIT, 2017) herausstellen. Das bewusste Nachdenken über die Darstellung von Zahlen in bestimmten Kontexten sollte demnach stärker in den Fokus der öffentlichen Wahrnehmung gerückt werden.

Die Relevanz statistischer Grundbildung zeigt sich auch in den boomenden Ratgebern, die auf dem populärwissenschaftlichen Markt seit Längerem vertreten sind (z. B. Huff, 1954; Krämer, 1991, 1992, 1994; Best, 2001, 2004, 2013; Bauer, Gigerenzer & Krämer, 2014; Bosbach & Korff, 2011, 2017). Mithilfe dieser Nachschlagewerke und „Gebrauchsanweisungen“ kann man lernen, wie man Daten und Diagramme angemessen interpretieren und begründet kritisieren kann. Die Ratgeber werden teilweise durch Online-Angebote wie die „Unstatistik des Monats“ (http://www.rwi-essen.de/unstatistik/) oder die „Zahlenlüge des Monats“ (http://www.luegen-mit-zahlen.de/) ergänzt.

Auch in der wissenschaftlichen Diskussion innerhalb der Mathematikdidaktik wird national wie international das Thema „Statistische Grundbildung“ oder „Statistical Literacy“ aufgegriffen (vgl. etwa Burrill & Biehler, 2011; Gal, 2002; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Graham, 2006; Kaun, 2008; Krüger, 2016). Im Bereich des Umgangs mit Daten ergeben sich hierbei spezifische Forderungen nach einer „Statistical Literacy“ oder „statistischen Grundbildung“, die nach Gal in den folgenden beiden Aspekten besteht:

(1) „people’s ability to *interpret and critically evaluate* statistical information, data-related arguments, or stochastic phenomena, which they may encounter in diverse contexts, and when relevant,

(2) their ability to *discuss or communicate* their reactions to such statistical information, such as their understanding of the meaning of the information, their opinions about the implications of this information, or their concerns regarding the acceptability of given conclusions” (Gal, 2002, S. 2 f.; Hervorhebungen im Original)

Katja Krüger fasst diesen Anspruch zusammen in der „Fähigkeit zur Interpretation und kritischen Bewertung statistischer Informationen und datenbasierter Argumentationen in verschiedenen Sachkontexten“ (Krüger, 2016, S. 2). Statistische Grundbildung soll „eine Basis für ein politisches Urteilsvermögen“ bilden (ebd., S. 3), so dass die Lernenden fähig sind, „Statistik als Informationsmittel kompetent zu nutzen, um nicht durch (schein-)statistische Argumente manipuliert zu werden“ (ebd., S. 2).

Das Modell von Gal (2002) enthält neben Wissenselementen die Fähigkeit sowie die Einstellung und Haltung, statistische Daten zu lesen und kritisch zu befragen. Statistical Literacy kann so im Bildungskonzept von Fischer (2001) als eine spezifisch auf die Statistik bezogene Form der Kommunikationsfähigkeit mit und über Daten und ihre statistische Aufbereitung verstanden werden.

2.3 Forschungsfragen

Der oben formulierte normative Anspruch an den Mathematikunterricht hat mit Blick auf unsere Datengesellschaft von seiner Aktualität nichts eingebüßt. In dieser Arbeit fokussieren wir auf einen Teilbereich, den Umgang mit Diagrammen. Im Zentrum steht die Frage, inwieweit Schülerinnen und Schülern sowie Studierenden das Reflektieren über Diagramme, ihre Aussagekraft und ihren Einsatz gelingt und wie sie darin unterstützt werden können.

Dazu gehen wir folgenden Unterfragen nach:

(1) Welche Reflexionsebenen nehmen Schülerinnen und Schüler sowie Studierende beim Nachdenken über Diagramme ein?

(2) Welche Kompetenzen und welche Schwierigkeiten zeigen sich beim Reflektieren über Diagramme?

(3) Inwiefern lassen sich allein aus den schriftlichen Produkten die im Reflexionsprozess eingenommenen Reflexionsebenen erkennen?

(4) Welche Anknüpfungspunkte für eine Förderung gibt es, an denen Maßnahmen für eine Lehrerprofessionalisierung in diesem Bereich ansetzen könnten?

3. Die LernWerkstatt Mathematik als Ort des Lehrens, Lernens und Forschens

Die LernWerkstatt Mathematik der JLU Gießen ist in das Lehramtsstudium aller Lehrämter eingebunden. In ihr lernen Studierende gängige Anschauungsmaterialien für den Einsatz im Mathematikunterricht kennen, sie arbeiten in Seminaren mit Schulklassen an bestimmten Themen des Mathematikunterrichts, sie betreuen mathematisch Interessierte und Begabte in

Enrichment-Programmen, sie lernen aber auch eine lernprozessbegleitende Diagnostik kennen und anwenden, u.v.m. Die Arbeit in der LernWerkstatt ist für die Studierenden im letzten fachdidaktischen Modul in Form eines Seminares eingebunden. Da Hessen ein Staatsexamen als Abschluss der Lehrerbildung abnimmt, sind die Studierenden in diesem Modul im 5. bzw. 6. Semester in den Studiengängen für das Grund-, Haupt-, Real- und Förderschullehramt sowie im 7. bzw. 8. Semester für das gymnasiale Lehramt. Im Haupt-, Real- und Förderschullehramt werden in einer parallel bzw. vorbereitend auf das Seminar stattfindenden Vorlesung spezifische Themen der LernWerkstattarbeit vorbereitet. Häufig werden dafür Video- und Transkriptvignetten (vgl. v. Aufschnaiter, Selter & Michaelis, 2017) aus den Bearbeitungsprozessen und -produkten der Schülerbesuche in der LernWerkstatt vergangener Semester eingesetzt. An ihnen können spezifische Themen der Lehrerbildung, wie etwa Aspekte des Materialeinsatzes, des Aufbaus von Grundvorstellungen, des Begriffslernens, der Sprache im Mathematikunterricht und auch des reflexionsorientierten Mathematikunterrichts thematisiert werden. Die Studierenden können dadurch zu einem diagnostischen Blick auf die Schülerinnen und Schüler befähigt werden (vgl. Beretz, Lengnink & v. Aufschnaiter, 2017).

3.1 Aufgabenstellung und fachdidaktische Sachanalyse

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildete ein im Sommersemester 2015 in der LernWerkstatt durchgeführter 90-minütiger Lernzirkel zu reflexionsorientierten Aufgabenformaten im Mathematikunterricht (vgl. Lengnink, 2016). Dieser wurde von 20 Schülerinnen und Schülern der Einführungsphase in Kleingruppen bearbeitet und dabei auf Video aufgezeichnet. Die Lerngruppe hatte keine besonderen unterrichtlichen Vorerfahrungen mit Reflexionsanlässen. Die in der LernWerkstatt verwendeten Grafiken und Diagramme sind der Literatur entnommen und um reflexionsorientierte Aufgabenstellungen, die ausschließlich mit mathematischen Kenntnissen aus der Sekundarstufe I gelöst werden können, ergänzt worden (Lengnink, 2016).

In unserer Untersuchung wurde unter anderem die Aufgabe „Deshalb arbeiten Studenten“ gestellt, die gekürzt und nur sehr leicht adaptiert den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (KMK, 2003, S.17) entnommen wurde. Diese wird im Folgenden ausschließlich betrachtet (vgl. Abbildung 1).

Die rechts abgebildete Grafik war einem Zeitungsartikel vom 15.07.1999 der Zeitschrift DIE ZEIT über eine Umfrage unter Studenten beigefügt. Das Diagramm zeigt die Ergebnisse zur Frage „Warum arbeiten Studenten?“. Mehrfachnennungen waren möglich.

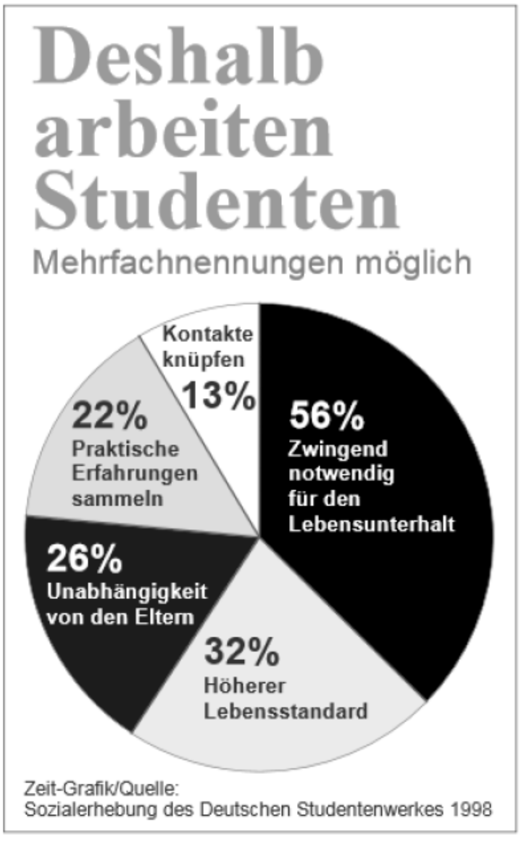
Daniel sagt: „Den Studierenden scheint es doch gar nicht so schlecht zu gehen, denn nur ungefähr ein Drittel muss ‚zwingend notwendig für den Lebensunterhalt‘ arbeiten.“
Emma entgegnet: „Das stimmt doch gar nicht!“

Aufgaben

a) Wie kommen Daniel und Emma jeweils zu ihren Meinungen?

b) Erläutern Sie, wie der Autor der ZEIT bei der Erstellung des Diagramms vermutlich vorgegangen ist.

c) Geben Sie eine graphische Darstellung der Befragungsergebnisse an, die die Meinungsverschiedenheit vermeidet.



vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss 2003

Abb. 1: Aufgabe „Deshalb arbeiten Studenten“, in dieser Formulierung in der Untersuchung verwendet.

Die Aufgabe sollte mit mathematischen Kenntnissen aus der Sekundarstufe I gelöst werden können. Es handelt sich um eine „komplexe, realitätsnahe Aufgabe aus dem Bereich der beschreibenden Statistik“ (KMK, 2003, S. 18). Die Grafik in der Aufgabe ist der ZEIT-Ausgabe vom 15.07.1999 entnommen und stammt ursprünglich aus einer Sozialerhebung des Deutschen Studentenwerkes von 1998. In einem Kreisdiagramm, dessen Anteile mit numerischen Prozentangaben beschriftet sind, die nicht der prozentualen Größe der jeweiligen Kreisanteile entsprechen, werden in fünf möglichen Antwortkategorien Untersuchungsergebnisse zur Frage „Warum arbeiten Studenten?“ dargestellt, wobei Mehrfachnennungen möglich waren. Dabei beziehen sich die Prozentangaben auf die (nicht bekannte) Anzahl der befragten Studenten, während das Kreisdiagramm die relativen Anteile der abgegebenen Stimmen für die jeweilige Antwortkategorie repräsentiert. Demnach wurden in einem Kreisdiagramm zwei Anteile zu unterschiedlichen Grundgesamtheiten dargestellt, zum einen durch den Anteil am Kreis und zum anderen durch den angegebenen Prozentsatz.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe aktivieren Schülerinnen und Schüler ihre allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Bereichen des mathematischen Argumentierens (K1) und des Verwendens mathematischer Darstellungen (K4) im Rahmen der Leitidee Daten und Zufall (L5). Die Aufgabenstellungen sind nach dem Lösungsvorschlag in den Bildungsstandards den Anforderungsbereichen I und II zugeordnet (KMK, 2003, S. 18). Es werden also trotz der augenscheinlichen Komplexität der gewählten Grafik an keiner Stelle explizit Anforderungen gestellt, die das Verallgemeinern und Reflektieren des Anforderungsbereichs III (ebd., S. 13) verlangen. Hieran wird deutlich, dass von der KMK nur eine phänomenologische und operative Bearbeitung der Aufgabenteile angestrebt wurde.

In Tabelle 1 wurde der Erwartungshorizont aus den Bildungsstandards entnommen und den Teilaufgaben der Aufgabe aus Abbildung 1 zugeordnet.

Mit Blick auf den oben formulierten normativen Anspruch einer statistischen Grundbildung im Umgang mit Diagrammen wäre dennoch eine Kritikfähigkeit von den Leserinnen und Lesern der Graphik wünschenswert. Dabei sollte idealerweise die Diskrepanz zwischen den beiden Anteilen unterschiedlicher Grundgesamtheiten thematisiert und nach der Angemessenheit der Verwendung eines Kreisdiagramms als mathematischem Modell gefragt werden. Damit fordert zwar die Aufgabe in ihrer derzeitigen Formulierung das Anforderungsniveau III nicht explizit ein, jedoch müsste mit Blick auf den Anspruch der Statistical Literacy im realen Leben die Angemessenheit der Grafik auch ohne ausdrückliche Nachfrage kritisch hinterfragt werden.

Aufgabe a)
Wie kommen Daniel und Emma jeweils zu ihren Meinungen?
Daniel berücksichtigt bei seiner Aussage nur den Flächenanteil im Kreisdiagramm entsprechend. Emma begründet ihre Aussage mit der numerischen Angabe.
Aufgabe b)
Erläutern Sie, wie der Autor bei der Erstellung des Diagramms vorgegangen ist.
Er summiert die Prozentsätze und erhält 149 % (unter Berücksichtigung der Mehrfachnennungen). Diese Zahl entspricht der gesamten Kreisfläche, also 360°. Er ordnet dann zum Beispiel dem Prozentsatz 56 % den Mittelpunktswinkel 56/149 360° zu. Analog verfährt er mit den anderen Prozentsätzen.
Aufgabe c)
Geben Sie eine graphische Darstellung der Befragungsergebnisse an, die die Meinungsverschiedenheit vermeidet.
Als mögliche geeignete graphische Darstellung wird ein Säulendiagramm angegeben.

Tab. 1: Erwartungshorizont aus den Bildungsstandards (KMK, 2003, S. 20) zur Aufgabe „Deshalb arbeiten Studenten“, angepasst an die Formulierung der Aufgabe aus Abb.1.

3.2 Datenlage

Zur obigen Aufgabe wurden 20 schriftliche Schülerbearbeitungen gesammelt und die Schülerinnen und Schüler wurden während der Bearbeitung in vier Kleingruppen videographiert.

Im Rahmen der Vorlesung, in der Studierenden Schülerdokumente und transkribierte Videoszenen zu der bearbeiteten Aufgabe vorgelegt wurden, fiel in der mündlichen Diskussion auf, dass die Studierenden zunächst ebenfalls fachlichen Klärungsbedarf hatten: Sie erkannten zunächst nicht, dass den Anteilen im Kreis und den angegebenen Prozentsätzen unterschiedliche Grundgesamtheiten der Nennungen und der befragten Personen zugrunde lagen. Zudem mussten sie selbst erst das Reflektieren einüben. Einige rechneten ausschließlich und machten keine Aussagen zur Bedeutung der Prozentsätze und Anteile im Kontext.

Zur Erfassung der Lernausgangslage wurde daher in einem zweiten Forschungsschritt dieselbe Aufgabe auch den Studierenden des Folgejahrgangs zur Bearbeitung vorgelegt. Dabei sind 92 schriftliche Abgaben und 44 Tondokumente entstanden, die den Bearbeitungsprozess in Partner- oder Kleingruppenarbeit dokumentieren.

4. Auswertung der Daten

Die folgende Auswertung der Daten hat zum Ziel, Anknüpfungspunkte für die Professionalisierung der künftigen Lehrkräfte im Themenfeld des Reflektierens im Umgang mit Daten und Diagrammen auszumachen und dieses in der zukünftigen Arbeit mit der LernWerkstatt Mathematik umzusetzen. Dabei wird zunächst von den schriftlichen Bearbeitungen der Studierenden und der Schülerinnen und Schüler ausgegangen. Die Aufgabenteile werden getrennt ausgewertet.

In den Bearbeitungen wurden zuerst die eingenommenen Reflexionsebenen codiert (vgl. Skovsmose, 1998; Peschek, Prediger & Schneider, 2008). Diese sind in Tabelle 2 erläutert und für den Umgang mit dem Diagramm konkretisiert.

Mathematisch orientierte Reflexion
Reflexionen über mathematische Inhalte, Gegenstände und Vorgehensweisen, wie etwa das Nachdenken über eine Lösung (Korrektheit, Lösungsweg,…), Fehlersuche, Metakognition und auch Verbalisierungsaufträge zu Verfahren.
Es wird auf die Richtigkeit der Darstellung der Daten im Kreisdiagramm eingegangen und darauf, wie die Anteile am Kreis sowie die Prozentsätze zustande kommen.
Modellorientierte Reflexion
Reflexionen über die Qualität und die Grenzen mathematischer Modellierungen, etwa über die Angemessenheit eines Modells oder einer Darstellung und die durch sie nahegelegten Fehldeutungen.
Es wird auf die Frage eingegangen, in wie weit sich das Kreisdiagramm zur Darstellung von Daten mit Mehrfachnennungen eignet und welche alternativen Modelle genutzt werden könnten.
Kontextorientierte Reflexion
Reflexionen über die Rolle der Verwendung von Mathematik in dem situativen Kontext, über ihren Zweck und ihre Funktion in dieser Situation.
Es wird der Frage nach möglichen Zwecken nachgegangen, die mit der gewählten Darstellung verbunden sind, um ggf. Anteile kleiner erscheinen zu lassen.
Lebensweltorientierte Reflexion
Reflexionen darüber, was mathematische Inhalte für mich und für mein Leben in dieser Gesellschaft leisten, wo sie mich betreffen.
Wo tauchen Diagramme zu Daten mit Mehrfachnennungen in meinem Leben auf, wie kann ich kompetent mit ihnen umgehen?

Tab. 2: Aus der Literatur übernommene Reflexionsebenen als Kategorien für die Codierung der schriftlichen Lösungen zur Aufgabe „Deshalb arbeiten Studenten" aus Abb. 1.

Da in den schriftlichen Abgaben die Ebene der lebensweltorientierten Reflexion nicht eingenommen wird, taucht diese als Auswertungskategorie im weiteren Text nicht auf.

Über die Kategorien der Reflexionsebenen hinaus wurden zu den Aufgabenteilen a) und b) noch induktiv Kategorien aus den Daten generiert, die die Art der Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung erfassen (zur Methode vgl. Kuckartz, 2012, S. 63). Dabei wurden die Antworten der Studierenden und der Schülerinnen und Schüler in Hinblick auf den Bezugsrahmen ihrer Analysen gruppiert. Es fiel auf, dass einige Probanden bei der Bearbeitung von Aufgabenteil a) auf der beschreibenden Ebene verbleiben (deskriptiv), einige inhaltliche Gründe für die Unterschiede der Anteile und Prozentsätze angeben (inhaltlich) und andere diese rechnerisch nachvollziehen (mathematisch). Bei der Bearbeitung des Aufgabenteils b) wurden operative Antworten, die Rechnungen aufführen, von interpretativen Bearbeitungen mit Bezug auf den Sachkontext abgegrenzt. Diese Merkmale wurden für die Kategorienbildung herangezogen. Die Kategorien sind in Tabelle 3 erläutert.

Aufgabe a)
Wie kommen Daniel und Emma jeweils zu ihren Meinungen?
Deskriptiv: Es findet eine reine Beschreibung statt, es werden keine Gründe für den Unterschied zwischen Prozentsatz und Anteil im Diagramm angegeben. **Inhaltlich**: Es werden situative Gründe für den Unterschied zwischen Prozentsatz und Anteil im Diagramm angegeben. **Mathematisch**: Es werden mathematische Gründe für den Unterschied zwischen Prozentsatz und Anteil im Diagramm angegeben.
Aufgabe b)
Erläutern Sie, wie der Autor bei der Erstellung des Diagramms vorgegangen ist.
Operativ: Es wird eine Rechnung angegeben, wie aus den Daten der Winkel im Diagramm berechnet werden kann, z. B. Aufsummieren der Prozentsätze zu 149 %, Zuordnung des Prozentsatzes 56 % zum Mittelpunktswinkel 56/149·360°, analog für die anderen Prozentsätze **Interpretativ**: Es wird auf die unterschiedlichen Grundgesamtheiten (die Anzahl der befragten Studenten und die Anzahl der abgegebenen Stimmen) eingegangen; die Bedeutung der Angabe von 56 % und des 1/3-Anteils im Kreisdiagramm, die zu der Meinungsverschiedenheit in a) geführt haben, wird thematisiert.

Tab. 3: Induktiv gewonnene Kategorien für die Codierung der schriftlichen Lösungen zur Aufgabe „Deshalb arbeiten Studenten" aus Abb. 1.

4.1 Auswertung zu Aufgabenteil a)

Im Folgenden werden die Auswertungen der Daten im Überblick und Vergleich mithilfe von Säulendiagrammen dargestellt. Diese geben Einblicke in typische Bearbeitungen, eine quantitative Aussage über Unterschiede z. B. zwischen Studierenden und Schülerinnen und Schülern kann aufgrund der geringen Fallzahl und der qualitativen Anlage der Studie nicht getroffen werden.

Fast alle 92 Studierenden haben den Aufgabenteil a) zunächst deskriptiv gelöst. Einige haben darüber hinaus noch auf einer inhaltlichen oder mathematischen Ebene versucht, die vorliegenden Unterschiede zwischen den Anteilen im Kreisdiagramm und den angegebenen Prozentsätzen zu beschreiben. Ein ähnlicher Befund zeigt sich auch bei den Schülerinnen und Schülern, allerdings verbleiben diese eher bei der deskriptiven Beschreibung. Nur sehr wenige zeigen in ihrer schriftlichen Bearbeitung ein inhaltliches oder mathematisches Problembewusstsein (vgl. Abb. 2).

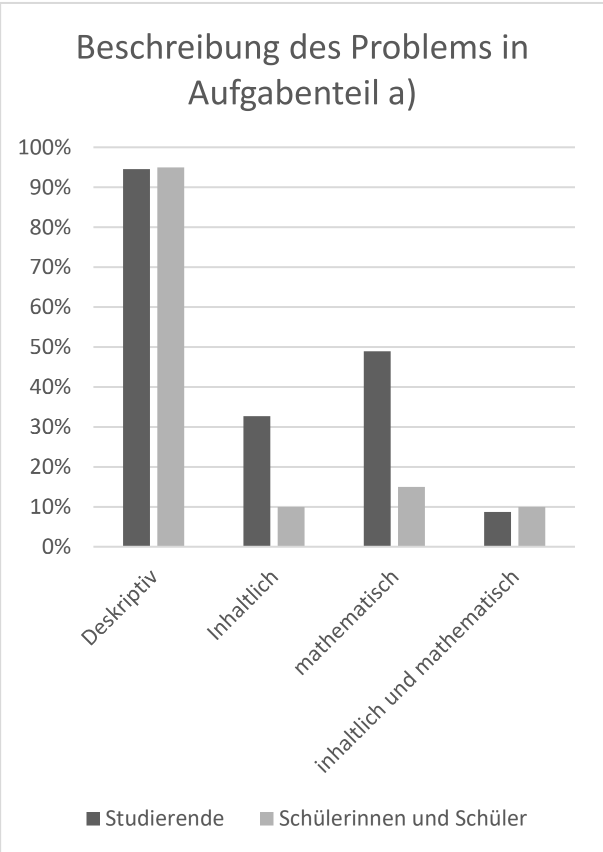


Abb. 2: Beschreibung des Problems in Aufgabenteil a).

Schaut man noch einmal genauer in die Daten, so beschreiben 8 von 92 Studierenden das Problem in Aufgabenteil a) gleichzeitig inhaltlich <u>und</u> mathematisch, das entspricht knapp 9 %. Dies wäre aber aus Sicht der multiperspektivischen Betrachtung des Diagramms für einen mündigen Umgang wünschenswert, auch wenn es in der Formulierung der Aufgabenstellung nicht explizit herausgefordert wird.

Die folgende Lösung eines Studenten zeigt, wie eine solche inhaltliche und mathematische Perspektive auf das Problem in a) aussehen könnte (Abb. 3).

In der studentischen Lösung wird im ersten Teil mathematisch argumentiert. Mit dem Verweis auf die Überschrift „Mehrfachnennungen sind möglich" wird aber bereits im ersten Absatz auch inhaltlich auf die Situation verwiesen. Während zu Beginn des zweiten Absatzes mathematisch argumentiert wird, greift der letzte Satz die inhaltliche Betrachtung wieder auf.

Daniel hat vermutlich die Prozentzahlen zusammen addiert und kam dann auf die Idee, dass ca. 1/3 der Befragten arbeiten müssen, um ihren Lebensunterhalt zu sichern (56 % von 149 %). Daniel könnte sich aber auch auf die Fläche des Kreises bezogen haben. 56 % ist ca. 1/3 des Kreises. Hier könnte man vermuten, dass Daniel die Unterüberschrift „Mehrfachnennungen sind möglich" überlesen hat.

Emma, die anderer Meinung ist, könnte den Gedanken haben, dass ein Kreis immer 100 % ergeben muss, wenn man alle Prozentzahlen zusammenaddiert. Bei 56 % der Befragten, die aufgrund des Lebensunterhaltes arbeiten müssen, ist es nämlich über die Hälfte.

Abb. 3: Studentische Lösung zu Aufgabenteil a).

In der Analyse der Reflexionsebenen zur Bearbeitung von Aufgabenteil a) zeigt sich, dass alle Schülerinnen und Schüler innerhalb der mathematisch orientierten Reflexion verbleiben. Bei den Studierenden nehmen zusätzlich zur mathematisch orientierten Reflexionsebene noch 14 % auch eine modellorientierte Reflexionsebene ein und eine Studentin argumentiert in Ansätzen auf der kontextorientierten Ebene (vgl. Abb. 4), insofern implizit ein Täuschungsversuch unterstellt wird:

Daniel betrachtet das Kreisdiagramm einseitig. <u>Er lässt sich von der Darstellungsweise des Diagramms blenden.</u> Daniel geht davon aus, dass das Diagramm insgesamt für 100 % steht und somit bemerkt er nicht, dass die Studenten in der Umfrage auch Mehrfachnennungen treffen konnten.

Abb. 4: Studentische Lösung zu Aufgabenteil a), kontextorientierte Reflexion (Hervorhebung durch die Autorinnen).

Einen Überblick über die eingenommenen Reflexionsebenen von Studierenden und Schülerinnen und Schülern in Aufgabenteil a) gibt Abbildung 5.

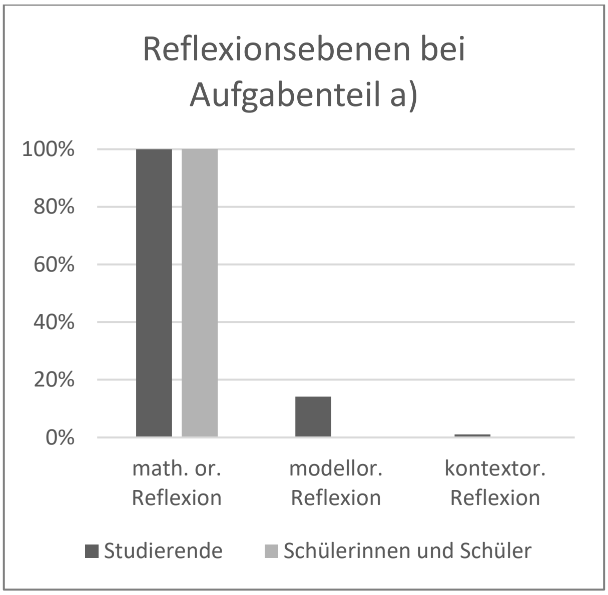


Abb. 5: Reflexionsebenen bei Aufgabenteil a).

4.2 Auswertung zu Aufgabenteil b)

Bei der Beantwortung der Frage, wie der Autor der ZEIT bei der Erstellung des Diagramms vorgegangen ist, wird von den meisten Studierenden zunächst ein operatives Vorgehen gewählt: Sie erklären genau, welche Rechenschritte der Autor vorgenommen hat. Etwas weniger als 40 % der Studierenden ordnen das Vorgehen zudem auch in den inhaltlichen Kontext (interpretativ) ein, knapp 9 % fragen darüber hinaus noch nach dem Zweck der Darstellung und reflektieren damit kontextorientiert. Demgegenüber wählen die Schülerinnen und Schüler zu 60 % den interpretativ-inhaltlichen Erklärungszugang und nur 20 % berechnen etwas (vgl. Abb. 6).

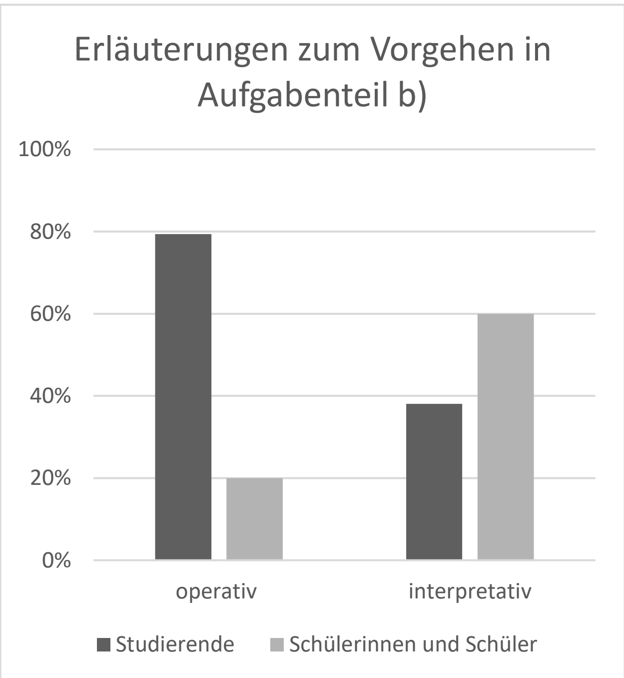


Abb. 6: Erläuterungen zum Vorgehen in Aufgabenteil b).

Ein Beispiel der Bearbeitung von Aufgabenteil b) durch einen Studenten, in dem zunächst ein operativer Zugang gewählt wird, dann aber auch interpretativ an die Aufgabe herangegangen wird bis hin zur modell- und kontextorientierten Reflexion, ist in Abbildung 7 zu finden.*Der Autor hat die gesamten Antworten, also auch die Mehrfachnennungen, in einem Kreisdiagramm dargestellt. Er hat allen Antworten 100 % zugeordnet und somit können mittels Dreisatz die jeweiligen prozentualen Anteile bestimmt werden. Demnach entspricht die graphische Verteilung nicht der prozentualen Verteilung, da Mehrfachnennungen möglich waren. Meiner Meinung nach wollte er mit dieser Darstellung eine kompakte Veranschaulichung der Resultate zu ermöglichen. Allerdings ist das Kreisdiagramm für Ergebnisse mit Mehrfachnennungen eher weniger gut geeignet, da die Summe aller Antworten über 100 % liegt und dies den visuellen Eindruck verzerrt.*

Abb. 7: Studentische Lösung zu Aufgabenteil b).

In Abbildung 8 ist eine interpretative Schülerlösung zu finden.

b) Wahrscheinlich hat der Autor nicht darauf geachtet, dass Mehrfachnennungen möglich waren, sondern nur auf die Stimmen geachtet.

b) Wahrscheinlich hat der Autor nicht darauf geachtet, dass Mehrfachnennungen möglich waren, sondern nur auf die Stimmen geachtet.

Abb. 8: Schülerlösung zum Vorgehen in Aufgabenteil b).

Der in Abbildung 6 sichtbare Effekt, dass Studierende bei Reflexionsaufträgen zunächst operativ vorgehen und sich somit auf das Nachrechnen der Anteile und Prozentsätze beschränken, ist häufig zu beobachten. Es fällt den Studierenden schwer, den notwendigen Perspektivwechsel vom Operieren zum Reflektieren, der beim Lösen von reflexionsorientierten Aufgaben von ihnen erwartet wird, zu vollziehen. Schülerinnen und Schüler lassen sich bei dieser Aufgabe auf einen solchen Perspektivwechsel leichter ein und interpretieren die Anteile im Kontext.

Bei den eingenommenen Reflexionsebenen (vgl. Abb. 9) zeigt sich daher erwartungsgemäß, dass die Studierenden fast alle mathematisch orientiert reflektieren, indem sie das rechnerische Vorgehen beschreiben und erläutern, wie es zu den Anteilen im Diagramm gekommen ist. Ca. die Hälfte bezieht auch in Bezug auf die Nutzung eines Kreisdiagramms als Modell zur Darstellung der Daten Stellung. Bei den Schülerinnen und Schülern werden stärker auch die Zwecke der Darstellung im Kreisdiagramm thematisiert und damit wird hier vermehrt kontextorientiert reflektiert.

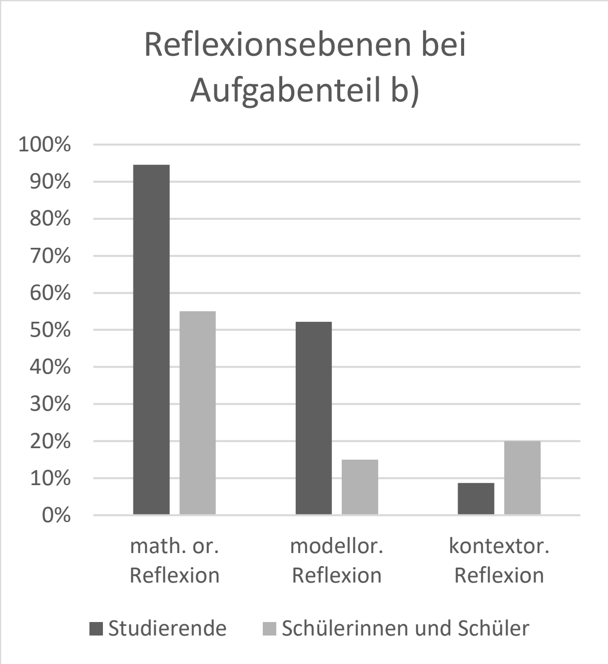


Abb. 9: Reflexionsebenen bei der Erklärung des Vorgehens in Aufgabenteil b).

4.3 Auswertung zu Aufgabenteil c)

In Aufgabenteil c) wurde nach der Angabe einer graphischen Darstellung gefragt, die die Meinungsverschiedenheit zwischen Daniel und Emma vermeidet. In diesem eigentlich laut Lösungsvorschlag der KMK rein operativen Auftrag zeigt sich, dass die Studierenden hier unaufgefordert den Perspektivwechsel vom rein operativen Erstellen eines Diagramms zum modellorientierten Reflektieren vollziehen. So begründen 73 % der Studierenden ihre Wahl der Darstellung mit der Angemessenheit des Modells, obwohl sie nur zum Erstellen einer alternativen Darstellung aufgefordert wurden. Es findet demnach unaufgefordert bei 73 % der Studierenden eine modellorientierte Reflexion statt, die sich so in den Schülerbearbeitungen nicht zeigt.

4.4 Übergreifende Auswertungsaspekte

Die Verschriftlichungen der Schülerinnen und Schüler sind insgesamt deutlich kürzer ausgefallen als die der Studierenden, was an der Art der Erhebung liegen kann. Es fällt aber auf, dass beide Gruppen Schwierigkeiten haben, den Sachverhalt sprachlich präzise zu fassen und so zu einer klaren Beschreibung der Problemlage zu gelangen (z. B. Abb. 10 für eine studentische Lösung).

Dafür wäre es hilfreich, auf der inhaltlichen Ebene die Anzahl von Nennungen und die Anzahl der Befragten auseinanderzuhalten, um sowohl den 1/3-Anteil des Kreises als ein Drittel aller Nennungen und die 56 % als den Prozentsatz aller Befragten korrekt interpretieren zu können. Zudem würden mit der mathematischen Fachsprache auch die Termini „Grundwert“, „Prozentwert“ und „Prozentsatz“ zur Verfügung stehen, mit denen allgemein beschrieben werden könnte, dass derselbe Prozentwert einerseits als 1/3 vom Grundwert aller Nennungen und andererseits als 56 % vom Grundwert aller Befragten interpretiert werden kann. Die Problematik könnte damit auf eine nächste Abstraktionsstufe gehoben und so die Erkenntnis gewonnen werden, dass Prozente oder Anteile sich stets auf Grundwerte beziehen, die ggf. verschieden sein können. Für den Umgang mit Diagrammen und Daten könnte daraus die Einsicht erwachsen, bei prozentualen Angaben stets nach dem Grundwert und seiner Interpretation zu fragen.

Er hat wahrscheinlich zunächst alle Antworten zusammengezählt und durch die Anzahl der Befragten geteilt, um so eine Prozentzahl zu erhalten. Der Autor hat sich, weshalb auch immer, für einen Kreisdiagramm entschieden und da es Mehrfachnennungen gibt hat er selbstverständlich einen Kreis mit über 100 %. <u>Der Autor hat die Antworten insgesamt mit den der einzelnen Antwortmöglichkeiten geteilt und die dementsprechend entstandenen Flächen in das Kreisdiagramm unterteilt.</u>

Abb. 10: Studentische Lösung zu Aufgabenteil b), sprachlich verwirrende Teile unterstrichen (Hervorhebung durch die Autorinnen).

Es zeigt sich allerdings in den Daten auch, dass es den Studierenden und noch stärker den Schülerinnen und Schülern schwerfällt, ihre Arbeitsergebnisse schriftlich substanziell zu formulieren. Dies lässt sich an der großen Diskrepanz der Bearbeitungsprozesse und der Verschriftlichungen festmachen. Im folgenden Beispiel ist das Transkript der Gruppendiskussion zu Aufgabenteil c) der Schüler-Kleingruppe 3 abgedruckt (vgl. Abb. 11). Man kann gut erkennen, dass hier verbal um eine modellorientierte Reflexion gerungen wurde. „S2: Muss das - in die Höhe halt-100 %; S3: Weil der kann ja eigentlich nicht mehr sagen, dass nur ehm 1/3 dafür ist.“ (Vgl. Zeilen 8-10)

Diese verbal stattfindende modellorientierte Reflexion findet sich jedoch in der Verschriftlichung in Abbildung 12 derselben Gruppe nicht wieder, was darauf hinweist, dass es sich lohnt, auch die mündlichen Reflexionsprozesse genauer zu untersuchen.

S2: Vielleicht auch in Balken?
S1: Hm, hab ich auch grad überlegt.
S3: Ja

(8s Pause)

S3: Also auf jeden Fall -
S2: Muss das - in die Höhe halt- 100 % -
S3: Weil der kann ja eigentlich nicht mehr sagen, dass nur ehm 1/3 dafür ist.
S2: Ja genau und dann können halt die Meinungsverschiedenheiten weg.
S1: Man könnte auch einfach das Kreis – also dieses Diagramm so anders malen halt dass hm 56 % so sind wo die 32 aufhört- Das passt aber nicht weil das sind ja mehr als 100.
S2: Das gibt ja nur die 100 %.
S1: (unsicher) Ja.
S3: Und die Balken kannste ja für jedes dann 100 % quasi. (S1 nickt) Für jeden Balken.
S3: Also wollen wir Balken machen?

Abb. 11: Transkript der Gruppendiskussion der Gruppe 3 von Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgabenteil c).

a) *Daniel richtet sich nach dem Kreisdiagramm und Emma richtet sich nach der Prozentzahl.*

b) *Der Autor hat 100 % im Kreis abgebildet, da aber die 100 % mehrere Antwortmöglichkeiten hatten, kamen mehr als 100 % raus.*

c)

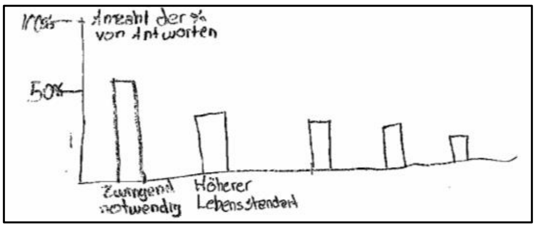


Abb. 12: Schriftliches Schülerprodukt der Gruppe 3.

5. Ergebnisse und Konsequenzen für die Weiterarbeit

Im Rahmen der Arbeit in der LernWerkstatt Mathematik der JLU Gießen wurden Daten von Schülerinnen und Schülern und von Studierenden erhoben, um deren Zugang zum Reflektieren über den Umgang mit Diagrammen zu erfassen. Diese wurden in der vorliegenden Arbeit ausgewertet, um einen weiteren Zirkel des Lehrens, Lernens und Forschens in der LernWerkstatt mit mehr mathematikdidaktischer Substanz durchlaufen zu können.

Es konnte Folgendes herausgefunden werden:

(1) Die Schülerinnen und Schüler sowie die Studierenden sind beim Nachdenken über Diagramme in der Lage, verschiedene Reflexionsebenen einzunehmen. Allerdings wird sehr häufig insbesondere von den Studierenden eine mathematisch orientierte Reflexionsebene eingenommen, obwohl die Daten zeigen, dass von ihnen prinzipiell auch andere Reflexionsebenen aktiviert werden können. Dies deutet darauf hin, dass das Aktivieren unterschiedlicher Reflexionsebenen zunächst stärker als in der vorliegenden Aufgabenstellung gezielt herausgefordert werden muss, um diese einzuüben und ihren Wert bewusst zu machen.

(2) Die Studierenden zeigen bereits eine große Kompetenz darin, die Wahl eines Modells zu begründen und somit modellorientiert zu reflektieren. Sie haben allerdings an manchen Stellen Schwierigkeiten, den Perspektivwechsel vom Operieren (Rechnen) zum Reflektieren (Nachdenken über Mathematik) zu vollziehen. Zudem zeigen sich Schwierigkeiten in der (fach)sprachlichen Präzisierung.

(3) Den schriftlichen Arbeitsprodukten ist häufig die Tiefe des Reflexionsprozesses nicht in vollem Umfang zu entnehmen. Insbesondere trifft dies auf die Bearbeitungen durch Schülerinnen und Schüler zu, aber auch viele Studierende haben Probleme, ihre Ergebnisse differenziert darzustellen. Beide Lerngruppen (Schülerinnen und Schüler sowie auch Studierende) sollten im reflexionsorientierten Schreiben unterstützt werden und die Studierenden sollten zudem auch lernen, welche Möglichkeiten es gibt, Schülerinnen und Schüler beim Aufschreiben von Ergebnissen zu unterstützen.

Folgende Konsequenzen für die Weiterarbeit lassen sich daraus ziehen:

(1) Eine wesentliche Konsequenz für die Weiterarbeit mit reflexionsorientierten Aufgaben ist es, die Studierenden zunächst im Einnehmen unterschiedlicher Reflexionsebenen gezielt zu trainieren. Dafür wurden bereits Aufgaben entwickelt, die die Studierenden gezielt zum Einnehmen einer spezifischen Reflexionsebene auffordern. Durch den Einsatz solcher Aufgaben in den Lehrveranstaltungen soll sichergestellt werden, dass die Studierenden die Reflexionsebenen kennen und sich in diese zunächst bewusst einfinden. Im Anschluss kann untersucht werden, ob sie bestimmte Reflexionsebenen auch verwenden, wenn sie nicht gezielt dazu aufgefordert werden. Eine solche Konkretisierung in Bezug auf die Aufgabe „Deshalb arbeiten Studenten“ ist in Abbildung 13 zu finden.

(2) Auch der Wechsel vom Operieren zum Reflektieren muss bewusst gemacht und eingeübt werden. Dies kann zum einen darin bestehen, zunächst reine Reflexionsanlässe anzubieten, die keine Möglichkeit des operativen Lösens der Aufgaben beinhalten. Zum anderen können die Studierenden aufgefordert werden, Aufgabenlösungen anderer im Hinblick auf die operativen und reflexiven Anteile zu kategorisieren, um sich so auf einer Metaebene auf das Reflektieren einzustellen.

1. Was sehen Sie in der Graphik?
2. Daniel behauptet, dass ca. 1/3 der Studenten zwingend für den Lebensunterhalt arbeiten muss. Emma sagt, dass es viel mehr sei. Was meinen Sie? Erklären Sie Ihre Meinung und auch, wie Daniel und Emma zu ihren Meinungen kommen.
3. Erklären Sie mathematisch, wodurch die Probleme im Diagramm zustande kommen.
4. Wieso wurden die Daten so dargestellt? Wer könnte daran ein Interesse haben?
5. Wie könnte man die Daten noch darstellen?
6. Was kann man allgemein aus dem Beispiel für das eigene Leben lernen?

Abb. 13: Veränderte Aufgabenstellung zur Aufgabe „Deshalb arbeiten Studenten".

(3) Das Einüben der (fach)sprachlichen Präzision kann mit Methoden zum sprachsensiblen Mathematikunterricht unterstützt werden (vgl. etwa Götze, 2015; Meyer & Prediger, 2012; Leisen, 2013). So fehlt sowohl den Studierenden als auch den Schülerinnen und Schülern oft das fachsprachliche Vokabular (s. oben), das in Wortspeichern angeboten werden kann. Auch inhaltsbezogene Vokabeln wie „Nennungen" und „Befragte" für die Aufgabe „Deshalb arbeiten Studenten" könnten Teil eines solchen Wortspeichers sein. Für die Formulierung von Begründungen zur Modellwahl könnten darüber hinaus Satzgeländer zur Verfügung gestellt werden, die helfen, insbesondere modell- und kontextorientierte Reflexionen zu versprachlichen.

Es könnten allerdings auch teilweise fachmathematische Kenntnisse fehlen, um die Aufgabe operativ zu verstehen und die Lösung nachzuvollziehen. Dies könnte beispielsweise durch das Schreiben erdachter Dialoge, die dem Leser nicht nur zeigen, was verstanden wurde, sondern auch wie etwas verstanden wurde, festgestellt werden (Wille, 2013). Gegebenenfalls muss an der Mathematik der Prozentrechnung zunächst noch einmal gearbeitet werden. Dies wird zum großen Teil die Schülerinnen und Schüler betreffen, aber je nach Diagramm und seinem mathematischen Gehalt haben auch Studierende Schwierigkeiten mit dem Abrufen lang zurückliegender Wissensbestände.

Langfristig ist es sinnvoll, vermehrt Schreibanlässe und Textproduktionen in den schulischen Mathematikunterricht zu integrieren, um Schülerinnen und Schüler nachhaltig für die Verwendung der mathematischen (Fach-)Sprache zu sensibilisieren, sprachlichen Hürden bei unbekannten Aufgaben entgegenzuwirken und inhaltsbezogene Vorstellungen zu fördern (Kuntze & Prediger, 2005). Dafür sind reflexionsorientierte Aufgabenformate, z. B. im Hinblick auf die angemessene Darstellung von Daten in Form von Diagrammen, geeignet. In der LernWerkstatt Mathematik können Studierende hierzu wichtige Erfahrungen für ihren zukünftigen Unterricht sammeln.

6. Ausblick

Die Weiterarbeit in der LernWerkstatt Mathematik wurde eingangs bereits kurz skizziert. Die oben erarbeiteten Ansatzpunkte für eine Förderung der Studierenden sind im Wintersemester 2018/2019 in die Vorlesung für Lehramtsstudierende im Haupt- und Realschullehramt eingeflossen. Zunächst wurde hier das Reflektieren mit den Studierenden anhand von konkreten Aufforderungen zum Reflektieren auf den verschiedenen Reflexionsebenen eingeübt.

Im Anschluss daran wurden die Studierenden im Rahmen der Vorlesung anhand von Video-Vignetten zu Schülerarbeitsprozessen im Diagnostizieren von Reflexionsprozessen beim Mathematiklernen trainiert. Diagnostische Kriterien waren die eingenommenen Reflexionsebenen, fachliche und sprachliche Schwierigkeiten sowie die inhaltlichen Zugänge zum Thema. Basierend auf diesen Grundlagen wurden die Studierenden danach im Rahmen einer Hausaufgabe aufgefordert, selbst reflexionsorientierte Aufgaben zu stellen und dabei gezielt unterschiedliche Reflexionsebenen anzusteuern. Zudem sollten sie einen eigenen Erwartungshorizont zu den von ihnen gestellten Aufgaben erarbeiten.

So vorbereitet wird ein Teil der Studierenden im Sommersemester 2019 im Rahmen eines LernWerkstatt-Seminars mit Schulklassen an reflexionsorientierten Aufgaben zum Umgang mit Diagrammen arbeiten. Dabei werden erneut Daten gesammelt, die im

Hinblick auf die Reflexionsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und mit Blick auf die Lernbegleitung durch die Studierenden ausgewertet werden können.

Die LernWerkstatt Mathematik stellt sich so als zentraler Dreh- und Angelpunkt im Feld des Lehrens, Lernens und Forschens heraus. In ihr werden Schülerinnen und Schüler für ein Nachdenken über Mathematik und ihren Einsatz sensibilisiert. Studierende lernen aus der Praxis anderer und bereiten sich so auf die eigene Praxiserfahrung im geschützten Rahmen einer LernWerkstatt vor. Als Forscherinnen und Lehrende an der Universität generieren wir in der LernWerkstatt Daten, die uns Einblicke in das Lehren und Lernen von Mathematik und in den Prozess des Reflektierens von Mathematik geben. Eine so verstandene Einheit von Forschung und Lehre kann und soll Theorie und Praxis gleichermaßen bereichern.

Literatur

Achtnich, T. (2016). *Im Land der Lügen. Wie uns Politik und Wirtschaft mit Zahlen manipulieren.* SWR/ARD-Dokumentation.

Aufschnaiter, C. v., Selter, C. & Michaelis, J. (2017). Nutzung von Vignetten zur Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenzen – Konzeptionelle Überlegungen und Beispiele aus der MINT-Lehrerbildung. In C. Selter, S. Hußmann, C. Hößle, C. Knipping, K. Lengnink & J. Michaelis (Hrsg.), *Diagnose und Förderung heterogener Lerngruppen – Theorien, Konzepte und Beispiele aus der MINT-Lehrerbildung* (S. 85-105). Münster: Waxmann.

Bauer, L. (1990). Mathematikunterricht und Reflexion. *mathematik lehren,* 38, 6-9.

Bauer, T., Gigerenzer, G. & Krämer, W. (2014). *Warum dick nicht doof macht und Genmais nicht tötet: Über Risiken und Nebenwirkungen der Unstatistik*. Frankfurt: Campus.

Beretz, A.-K., Lengnink, K. & Aufschnaiter, C. v. (2017). Diagnostische Kompetenz gezielt fördern – Videoeinsatz im Lehramtsstudium Mathematik und Physik. In C. Selter, S. Hußmann, C. Hößle, C. Knipping & K. Lengnink (Hrsg.), *Diagnose und Förderung heterogener Lerngruppen – Theorien, Konzepte und Beispiele aus der MINT-Lehrerbildung* (S. 149-168*).* Münster: Waxmann.

Best, J. (2001). *Damned Lies and Statistics. Untangling Numbers from the Media, Politicians and Activists.* Berkeley [u. a.]: University of California Press.

Best, J. (2004). *More Damned Lies and Statistics. How Numbers Confuse Public Issues.* Berkeley [u. a.]: University of California Press.

Best, J. (2013). *Stat-Spotting. A Field Guide to Identifying Dubious Data.* Berkeley [u. a.]: University of California Press.

Bosbach, G. & Korff, J. J. (2011). *Lügen mit Zahlen. Wie wir mit Statistiken manipuliert werden.* München: Heyne.

Bosbach, G. & Korff, J. J. (2017). *Die Zahlentrickser. Das Märchen von den aussterbenden Deutschen und andere Statistiklügen.* München: Heyne.

Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Hrsg.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study* (S. 57-69). New York: Springer.

Fischer, R. (1984). Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand — Visionen eines neuen Mathematikunterrichts*. Journal für Didaktik der Mathematik, 5*(1/2)*,* 51-85.

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung. In A. Fischer, K.H. Schäfer & D. Zöllner (Hrsg.), *Situation – Ursprung der Bildung. Franz- Fischer- Jahrbuch 2001* (S. 151–161). Leipzig: Universitätsverlag.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Teaching Practice.* Dordrecht/Heidelberg/London/New York: Springer.

Götze, D. (2015). *Sprachförderung im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen.

Graham, A. (2006). *Developing Thinking in Statistics.* Los Angeles/London/New Delhi/ Singapore/Washington DC: The Open University.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik, 13, Reihe Pädagogik. Weinheim/Basel: Beltz.

Huff, D. (1954). *How to Lie with Statistics.* New York: W. W. Norton & Company.

Kaun, A. (2008). *Didaktik der Statistik. Eine fachdidaktische Grundlegung.* Didaktik in Forschung und Praxis, Bd. 38. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Kaune, C. (1999). Förderung metakognitiver Aktivitäten durch geeignete Aufgabenstellungen. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5. März 1999 in Bern* (S. 281-284). Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Abrufbar unter: https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [27/07/2018].

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Abrufbar unter: https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf [27/07/2018].

Krämer, W. (1991). *So lügt man mit Statistik.* München: Piper.

Krämer, W. (1992). *Statistik verstehen. Eine Gebrauchsanweisung*. München: Piper.

Krämer, Walter (1994). *So überzeugt man mit Statistik.* Frankfurt/New York: Campus Verlag. Reihe Campus, Bd. 1084.

Krüger, K. (2016). Statistische Grundbildung fördern. *mathematik lehren,* 197, 2-7.

Kuckartz; U. (2012): *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* Weinheim: Beltz.

Kuntze, S. & Prediger, S. (2005). Ich schreibe, also denk' ich – Über Mathematik schreiben. *Praxis der Mathematik in der Schule, 47*(5), 1-6.

Leisen, Josef (2013). *Handbuch Sprachförderung im Fach. Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis.* Stuttgart: Ernst Klett Sprachen.

Lengnink, K. (2004). Reflektieren und Beurteilen von Mathematik aus der Bildungsperspektive mathematischer Mündigkeit. In A. Heinze & S. Kuntze (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2004*. *Vorträge auf der 38. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5. März 2004 in Augsburg* (S. 337-340). Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Lengnink, K. (2005). Mathematik reflektieren und beurteilen – Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren und beurteilen* (S. 21-36). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft, 21-36. Darmstädter Texte zur Allgemeinen Wissenschaft 4.

Lengnink, K. (2016). Reflektieren im Mathematikunterricht als Beitrag zur Mathematischen Bildung – Anspruch und Realisierung. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016 in Heidelberg*., Band 3. (S. 1277-1280). Münster: WTM-Verlag.

Lengnink, K. & Roth, J. (2016). Lehr-Lern-Labor Mathematik als Ort der Forschung. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*, Band 3 (S. 1267-1268). Münster: WTM-Verlag.

DIE ZEIT (27.04.2017). *Lügen nach Zahlen.*

mathe live 8 (2017). Herausgegeben von H. Böer, D. Göckel, D. Hesse, S. Kliemann, A. Koepsell, R. Puscher, M. Römer, W. Schmidt & R. Vernay. Stuttgart: Klett.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 54(45), 2-9.

Neubrand, M. (1990). Stoffvermittlung und Reflexion: mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht. *mathematica didactica, 13*, 21-48.

Peschek, W. (1997). Mathematische Inhalte und mathematische Bildung. In K. Peter Müller (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 31. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 1997 in Leipzig* (S. 407-410). Hildesheim: Franzbecker.

Peschek, W. (2005). Reflexion und Reflexionswissen in R. Fischers Konzept der Höheren Allgemeinbildung. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren und beurteilen* (S. 55-68). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft. Darmstädter Texte zur Allgemeinen Wissenschaft 4.

Peschek, W. (2006). Mathematische Bildung als Aushandlungsprozess. In E. Schneider (Hrsg.), *Fokus Didaktik. Vorträge beim 16. internationalen Kongress der ÖMG und Jahrestagung der DMV. Universität Klagenfurt, 18.-23.09.2005* (S. 79-96). München/Wien: Profil Verlag, 79-96. Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik 4.

Peschek, W., Prediger, S. & Schneider, E. (2008). Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule, 50*(20), 1-6.

Schmitt, O. (2017). *Reflexionswissen zur linearen Algebra in der Sekundarstufe II.* Perspektiven der Mathematikdidaktik. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Sjuts, J. (2001). Metakognition beim Mathematiklernen: das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. *Der Mathematikunterricht, 47*(1), 61-68.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch sozialem Vertrag. *Journal für Mathematikdidaktik, 24*(1), 18-40.

Sjuts, J. (2006). Beim Denken gedacht, das Denken überwacht. Ideen der Metakognition beim Umgang mit Termen. *mathematik lehren, 136*, 47-49.

Skovsmose, O. (1989). Models and reflective knowledge. *ZDM,* 21(1), 3-8.

Skovsmose, O. (1994). Towards a Critical Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 35-57.

Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy. Citizenship, Mathematical Archaelogy, Mathemacy and Deliberative Interaction. *ZDM, 30*(6), 195-203.

Skovsmose, O. (2006). Reflections as a Challenge. *ZDM, 38*(4), 323-332.

Wille, A. (2013). Mathematik beim Schreiben denken – Auseinandersetzung mit Mathematik in Form von selbst erdachten Dialogen. In M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess. Philosophische, Historische und Didaktische Perspektiven* (S. 239-254). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wille, R. (2001). Allgemeine Mathematik – Mathematik für die Allgemeinheit. In K. Lengnink, S. Prediger & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik und Mensch. Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik* (S. 3-19). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft. Darmstädter Schriften zur Allgemeinen Wissenschaft 2.

Anschrift der Verfasser

Katja Lengnink
Lena K. Eckhardt
JLU Gießen
Institut für Didaktik der Mathematik
Karl-Glöckner-Str. 21 c
35394 Gießen
katja.lengnink@math.uni-giessen.de
lena.k.eckhardt@math.uni-giessen.de