„Weil […] man nicht wirklich rechnen muss“ – Historische Zugänge zur schriftlichen Multiplikation

RALF KRÖMER, WUPPERTAL & SARAH BEUMANN, WUPPERTAL

Zusammenfassung: *In diesem Beitrag berichten wir über den Einsatz verschiedener historischer Multiplikationsverfahren in mehreren Unterrichtsprojekten. Bei den Schülerinnen und Schülern sollte einerseits mathematisch orientierte Reflexion im Sinne Skovsmoses angestoßen werden; es sollte aber auch die Historizität von Mathematik erlebbar werden. Das Beispiel zeigt, dass Jankvists Kategorien „history as a tool“ und „history as a goal“ durchaus gleichzeitig auftreten können. Schülerprodukte und Mitschnitte von Unterrichtsgesprächen erlauben uns Schlussfolgerungen bezüglich des Erreichens der Ziele und Überlegungen zu möglichen Weiterentwicklungen des Materials.*

Abstract: *In this paper, we describe how we used various historical multiplication algorithms in several classroom projects. On the one hand, we intended to initiate mathematically oriented reflection (in the sense of Skovsmose); on the other hand, we intended to make the pupils experience the historicity of mathematics. Our example shows that Jankvist's categories "history as a tool" and "history as a goal" can occur simultaneously. From pupils' products and recordings of classroom discussions, we draw conclusions about whether our goals were achieved and about how the material used could be further developed.*

1. Einleitung

In diesem Beitrag berichten wir über Erfahrungen mit dem Einsatz verschiedener historischer Multiplikationsverfahren im Mathematikunterricht (ägyptisch, russische Bauernmultiplikation, Gelosia, Napiersche Rechenstäbchen, vedisches Sutra „Vertikal und kreuzweise“, chinesische Strichmethode). Diese Verfahren wurden in mehreren Unterrichtsprojekten im schulischen und außerschulischen Rahmen eingesetzt. Unser Beitrag beschäftigt sich also mit Design, Integration und Evaluation von Geschichte der Mathematik im schulischen Kontext.

Leitgedanke dieser Projekte war, dass Lernende authentische Erfahrungen mit Mathematik als Disziplin machen sollen, insofern als ein wesentlicher Auftrag der Vermittlung von Mathematik darin besteht, Raum zu schaffen für eigene Entdeckungen (Vollrath und Roth, 2012). So wird transparent, dass Mathematik ein Prozess ist. Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass unser „Normalverfahren“ eines neben vielen anderen ist, dass sich historisch auch andere Verfahren entwickelt haben, die sich aber nicht weiter durchsetzen konnten – zumindest bei uns nicht. Sie lernen deren Funktionsweisen kennen und vergleichen sie mit unserem Verfahren.

Ein solcher Unterricht kann bezüglich der Rolle des Historischen an verschiedenen Zielen ausgerichtet sein. Im vorliegenden Beitrag wollen wir uns mit zwei möglichen solchen Zielen auseinandersetzen: (1) eine Reflexion darüber anzustoßen, wie und wieso die einzelnen Verfahren funktionieren sowie was die einzelnen Verfahren miteinander verbindet, aber auch (2) die Historizität von Mathematik erlebbar zu machen sowie eine Reflexion über diese Historizität anzuregen und damit eventuell das Bild, das die Schülerinnen und Schüler von der heutigen Mathematik haben, zu erweitern. In unseren Unterrichtsprojekten lag der Fokus zwar vor allem auf Ziel (1), wir möchten aber auch (in Abschnitt 5.2) über eine anschließende Schülerbefragung berichten, die eher mit Ziel (2) in Zusammenhang steht. Somit illustriert unser Projekt gleichzeitig die beiden Kategorien „history as a tool“ und „history as a goal“ von Jankvist (2009, S. 242), und als eine solche simultane Illustration sollte unser Beitrag auch gelesen werden.

Jankvists Sprechweise wird in der Einleitung des Themenhefts eingehend diskutiert; hier nur so viel: Verwendet man geschichtliche Elemente im Mathematikunterricht „as a tool“, so möchte man durch diese Verwendung eigentlich etwas anderes erreichen als historisches Wissen selbst, z. B. eine Förderung von Verständnis eines (mathematischen) Stoffs; bei der Verwendung „as a goal“ hingegen geht es um die Geschichte selbst, also den Erwerb von mathematikhistorischem Wissen als eigenem Lernziel. Uns geht es darum, an einem Fallbeispiel zu zeigen, dass erstens beide Verwendungsweisen sehr wohl nebeneinander stattfinden können und dass zweitens ein Unterricht, bei dem es um „history as a goal“ geht, sich weniger am Leitbegriff Förderung orientiert und mehr an den Leitbegriffen Bildung und Aufklärung.

2. Theoretischer Rahmen

In beiden oben genannten Zielsetzungen haben wir jeweils das Wort „Reflexion“ an zentraler Stelle verwendet. Allerdings geht es jeweils um verschiedene Arten von Reflexion; es ist also zunächst wichtig, den Begriff der Reflexion genauer auszudifferenzieren. Wir beziehen uns auf Skovsmose (1998), der vier Arten der Reflexion nach ihren Bezugspunkten unterscheidet (hier referiert nach Peschek, Prediger und Schneider (2008, S. 4)): Reflexion kann mathematisch orientiert, modellorientiert, kontextorientiert und lebensweltorientiert sein. Für das Weitere sind vor allem mathematisch orientierte Reflexion und lebensweltorientierte Reflexion wichtig.

Unter mathematisch orientierter Reflexion verstehen wir, dass ein Mensch, der in irgendeiner Situation (im Unterricht oder anderswo) Mathematik treibt, darüber nachdenkt, welche Eigenschaften die dabei verwendeten mathematischen Begriffe, Operationen, Kalküle, Vorgehensweisen etc. haben, wie und wieso sie funktionieren, ob getroffene Aussagen zutreffen usw.; es geht also um ein Verlassen der reinen Kalkülebene zugunsten einer (innermathematischen) Verständnis- und Begründungsebene.

Lebensweltorientierte Reflexion findet dann statt, wenn der Mensch darüber nachdenkt, welche Bedeutung/ welchen Sinn für ihn selbst die Mathematik in seinem Leben und in der derzeitigen Gesellschaft hat. Weitere Erläuterungen zu diesen und den übrigen Reflexionsarten und eine eingehendere Diskussion findet man bei Peschek, Prediger und Schneider (2008, S. 4); Vorschläge, wie historische Elemente im Mathematikunterricht insbesondere eine lebensweltorientierte Reflexion anstoßen können, findet man bei Lengnink und Krömer (2018, S. 151).

In unserer ersten Zielsetzung geht es offensichtlich um mathematisch orientierte Reflexion, und der Einsatz von Geschichte dient hier „as a tool". Um welche Art der Reflexion es in unserer zweiten Zielsetzung geht, ist nicht auf den ersten Blick klar; wie unten noch näher erläutert wird, haben wir uns in unseren Unterrichtsprojekten der Historizität der Mathematik genähert mittels einer Frage, die lebensweltorientierte Reflexion anstoßen soll, insofern konkret über den Bezug der Gegenwart des/der Einzelnen zur Geschichte der Mathematik nachgedacht werden soll. In dieser Form handelt es sich bei der Beschäftigung mit Geschichte der Mathematik zweifellos um „history as a goal". Kann man das Anstoßen mathematisch orientierter Reflexion noch unter dem Leitbegriff Förderung subsumieren, so passt dieser bei unserer zweiten Zielsetzung nicht mehr so recht; eher würde man hier formulieren, dass es um Bildung oder Aufklärung geht.

Im Grunde geht es bei Historizität von Mathematik um die Frage, wie Mathematik gesehen wird: Sieht man sie eher als statisch oder eher als dynamisch und Veränderungen unterworfen? Sieht man sie eher als naturgegeben oder eher als Kulturtechnik? Dass Beschäftigung mit Geschichte der Mathematik ein Nachdenken hierüber anstoßen kann, wird in folgendem Zitat als „wachsender Konsens" formuliert:

> There is a growing consensus that historical work of pupils and students may contribute to further through:
>
> - providing insights into the development of mathematical concepts,
> - developing a deeper understanding of the role of mathematics in our surrounding world and its relation to applications, culture and philosophy
> - and encouraging the perception of the subjective dimensions of mathematics: of aims and intentions in the building of mathematical concepts and algorithms, of alternative methods and of personal and creative aspects. (Furinghetti et al., 2006, S. 1285)

So formuliert, ist dieser Konsens zunächst einmal eine Behauptung, die empirisch in der praktischen Umsetzung zu überprüfen wäre, wozu wir mit unserer Untersuchung einen Beitrag leisten möchten. Unser Beitrag zeigt, dass für den bei (1) erhofften Effekt bzw. das Anstoßen mathematisch orientierter Reflexion die Tatsache, dass es sich um historische Verfahren handelt, nicht entscheidend ist, für (2) bzw. Reflexion über Historizität schon (was aber auch fast auf der Hand liegt). Überspitzt formuliert: Setzt man Geschichte „as a tool" ein, kann man meist auch andere tools nehmen, beim Einsatz „as a goal" geht das natürlich nicht.

Im konkreten Fall unserer Unterrichtsprojekte war es so, dass wir nicht für alle Verfahren gleichermaßen den historischen Kontext thematisieren konnten. Wo dies nur in geringem Maße geschah, lag dies teilweise daran, dass über ihn tatsächlich zu wenig bekannt ist (siehe dazu Abschnitt 3 unten), teilweise auch daran, dass wir uns bewusst so entschieden haben, um genügend Unterrichtszeit auf Ziel (1) verwenden zu können. Damit ist klar, dass ein Erreichen von Ziel (2) bei den betreffenden Verfahren kaum zu erwarten war. Wir haben allerdings ohnehin die mit (2) zusammenhängenden Schritte jeweils an das Ende der Unterrichtsprojekte gesetzt, wo man alle Verfahren in Zusammenschau betrachten konnte, also auch solche, deren historischer Kontext ausführlich behandelt wurde.

Gleichzeitig muss man im Auge behalten, dass die Sprechweise des Einsatzes von Geschichte im Unterricht „as a tool" auch etwas allzu Vereinfachendes an sich hat. Denn historisches Arbeiten im Unterricht trägt nicht gewissermaßen von selbst die gewünschten Früchte, sondern es sind dazu auch Hürden zu nehmen. Jahnke formuliert dies so:

> Die geschichtliche Perspektive [steht] in einem unverkennbaren Spannungsverhältnis zu unserer heutigen Sicht der Mathematik […] Daher kann man nicht erwarten, daß Geschichte den Schülern das Verständnis des Stoffes ohne weiteres erleichtert. Vielmehr sollte

> jeder Lehrer sich bewußt sein, daß historische Inhalte ihm und seinen Schülern zusätzliche Mühe abverlangen. (Jahnke, 1995, S. 31)

Man könnte sich nun fragen: Wenn historische Bezüge ein Verständnis nicht erleichtern, warum haben wir uns dann entschieden, sie überhaupt einzusetzen? Eine solche Fragestellung unterstellt allerdings bereits, dass Geschichte, wenn überhaupt, dann jedenfalls „as a tool" eingesetzt wird, als (mehr oder weniger geeignetes) Mittel, um einen (anderen) Zweck zu erreichen. Die Verwendung „as a goal", also der Erwerb von mathematikhistorischem Wissen als eigenes Lernziel, würde von vorneherein ausgeblendet. Aber selbst eine Verwendung „as a tool" ist durch Jahnkes Warnung nicht von vorneherein ausgeschlossen; sie muss nur etwas anders konzipiert werden. Jahnke weiter:

> Diese [Mühe] lohnt allerdings den Aufwand. Geschichte ist gerade deswegen produktiv, weil sie die vorhandenen Sichtweisen nicht einfach bestätigt, sondern ein fremdes, sperriges Element in den Unterricht einführt, das zum Nachdenken anregt. (Jahnke, 1995, S. 31)

Unsere Unterrichtsprojekte haben genau hier angesetzt: durch Fremdes und Sperriges zum Nachdenken (zur Reflexion) anregen. Daraus ergibt sich auch eine genauere Bestimmung der in diesem Beitrag verwendeten Sprechweisen von historischen Multiplikationsverfahren und der Historizität der Mathematik. Als „historisch" gilt uns hier das, was einst verwendet wurde, heute aber im Normalfall nicht mehr. Natürlich hat auch das Normalverfahren eine Geschichte; diese ließe sich aber nicht in analoger Weise unterrichtlich einsetzen, weil das Verfahren den Lernenden vertraut, eben gegenwärtig, ist. Hierbei grenzen wir nicht immer deutlich ab, ob das „Fremde und Sperrige" einem genuin historischen Kontext entstammt oder eher einem von dem unseren verschiedenen (aber nicht notwendig der Vergangenheit angehörigen) Kulturkreis. Wie wir sehen werden, spielen sowohl die subjektive Vertrautheit mit dem Normalverfahren als auch die Kategorie der Interkulturalität eine große Rolle bei der Reflexion der Schülerinnen und Schüler über die Verfahren. Dies führt natürlich auf einen schwächeren Begriff von Historizität als eine tatsächliche Thematisierung des historischen Kontexts.

Wir sollten allerdings noch erwähnen, dass nach Jahnkes Auffassung die von ihm erprobte Arbeit mit Quellentexten und der zugehörige hermeneutische Zugang besser geeignet sind, in der skizzierten Form zum Nachdenken anzuregen, als historische Aufgaben dies sind:

> Die andere Möglichkeit, historische Aufgaben zu behandeln, ist dadurch natürlich nicht ausgeschlossen. Dennoch stellt sich hier schnell ein Dilemma ein. Aufgaben in historischer Formulierung […] wirken häufig eher skurril als verständnisfördernd oder motivierend, weil sie zur Erschließung ihres Kontextes nichts hergeben. Gibt man die Probleme in moderner Formulierung, bleibt [...] die eigentlich historische Dimension ausgeschlossen. (Jahnke, 1995, S. 32)

Wie unten noch näher erläutert wird, haben wir in unseren Projekten keine historischen Aufgabenstellungen verwendet, und auch eine Erarbeitung der Verfahren aus authentischen Quellen war nur in Ausnahmefällen möglich. Insofern sind wir weitgehend in der Situation des letzten Satzes des obigen Zitats. Allerdings wurde wenn möglich der historische Kontext der Verfahren thematisiert. Dem hermeneutischen Zugang sind in unserem Fall (Arbeit mit Schülerinnen und Schülern der sechsten Jahrgangsstufe) klare Grenzen gesetzt, denn authentische Quellen sind mit den Mitteln dieser Jahrgangsstufe meist schon sprachlich kaum zugänglich, auch fehlt vielfach noch Hintergrundwissen zur Allgemeingeschichte. Gleichwohl sehen wir gewisse Möglichkeiten einer stärkeren hermeneutischen Ausrichtung; diese werden im Ausblick diskutiert.

3. Mathematischer und historischer Hintergrund der Rechenverfahren

Im Folgenden werden alle im Projekt eingesetzten Multiplikationsverfahren kurz vorgestellt, auf ihre wichtigsten mathematischen Eigenschaften hin untersucht und historisch eingeordnet – letzteres, soweit dies möglich ist: Wir geben jeweils an, was nach unserer Kenntnis Stand der Forschung zum historischen Kontext der jeweiligen Verfahren ist. Didaktisch werden im Folgenden nur Aspekte angesprochen, die sich im Hinblick auf unsere Ziele als bedeutsam erweisen werden. Eine ausführlichere didaktische Analyse des „Normalverfahrens" sowie einiger der hier verwendeten Alternativen findet man in Padbergs *Didaktik der Arithmetik* und der dort genannten weiterführenden Literatur (1992, S. 224–230). Allerdings werden dort die Alternativen ausschließlich als mögliche Reaktionen auf bestimmte häufige Fehlertypen beim Normalverfahren betrachtet – nicht unter dem Gesichtspunkt der Historizität, um die es hier aber gerade geht (vgl. außerdem Schipper et al., 2018, S. 91–104).

Zur Vereinheitlichung der Darstellung sprechen wir allgemein stets vom Produkt $a \cdot b$ mit erstem Faktor a und zweitem Faktor b und illustrieren dies jeweils anhand des Beispiels $86 \cdot 95$.

3.1 Die ägyptische Multiplikation

Das ägyptische Multiplikationsverfahren beruht auf fortgesetztem Verdoppeln. Man schreibt links eine 1, rechts die Zahl b hin (im Beispiel 95). Jeweils darunter schreibt man das Doppelte beider Zahlen und wiederholt dies, bis im nächsten Schritt links eine Zahl erreicht würde, die größer als a wäre. Nun sucht man diejenigen Zeilen des entstandenen Schemas auf, deren linke Seiten addiert a (im Beispiel 86 = 2 + 4 + 16 + 64) ergeben, und markiert diese Zeilen, z. B. mit einem Schrägstrich. Schließlich addiert man die rechten Seiten der markierten Zeilen und erhält als Summe das gesuchte Produkt (im Beispiel 8170; s. Abb. 1).

	1	95
/	2	190
/	4	380
	8	760
/	16	1520
	32	3040
/	64	6080
	86	8170

Abb. 1: Ägyptische Methode

Dass sich so tatsächlich das gesuchte Produkt ergibt, liegt daran, dass man im letzten Schritt die „richtigen“ Vielfachen von b (im Beispiel (2 + 4 + 16 + 64) · 95 = 86 · 95) aufaddiert. Wie man sich leicht klarmacht, wurde auf der linken Seite die Binärdarstellung von a ermittelt (die markierten Zeilen entsprechen den Einsen, die nicht markierten den Nullen in dieser); daher ist es auch stets möglich, geeignete Zeilen für die Summendarstellung von a zu finden, und diese wird stets eindeutig sein.

Es lässt sich gut aus Quellen belegen, dass dieses Verfahren bereits im mittleren Reich von den Ägyptern verwendet wurde (Vogel, 1958, S. 32; Tropfke, 1980, S. 208). Prinzipiell wäre ein unterrichtlicher Zugang über authentische Quellen möglich, allerdings mit der Hürde der hieratischen Zahlschrift, die sich wesentlich schwerer entziffern lässt als Hieroglyphen. In unserer Durchführung haben wir die Einbettung des Verfahrens in den historischen Kontext recht knapp gehalten (s. u. 4.2); im Ausblick gehen wir auf Erweiterungsmöglichkeiten ein.

3.2 Die Bauernmultiplikation

Beim Verfahren der Bauernmultiplikation schreibt man a und b nebeneinander. Rechts wird, wie beim ägyptischen Verfahren, b fortschreitend verdoppelt. Links wird a ganzzahlig halbiert, also Division mit Rest durch 2 ausgeführt und der Rest ggf. weggelassen. (Alternativ könnte man auch formulieren, dass halbiert und ggf. auf die nächste ganze Zahl abgerundet wird.) Dies wird mit den entstehenden Quotienten solange wiederholt, bis der Quotient 1 entsteht. Im zweiten Schritt werden alle diejenigen Zeilen gestrichen, in denen links eine gerade Zahl steht. Im letzten Schritt werden die rechten Einträge der verbleibenden Zeilen aufaddiert und liefern so das gesuchte Produkt (Abb. 2).

~~86~~	~~95~~
43	190
21	380
~~10~~	~~760~~
5	1520
~~2~~	~~3040~~
1	6080
	8170

Abb. 2: Bauernmultiplikation

Auch dieses Verfahren beruht auf der Binärdarstellung von a, auch wenn dies hier vermutlich weniger offensichtlich ist. Gestrichene Zeilen entsprechen Nullen und nicht gestrichene Einsen, und man muss von unten nach oben lesen, z. B. 86 = $(1010110)_2$. Denn durch die fortschreitende Division mit Rest durch 2 isoliert man gerade nacheinander die Koeffizienten der Binärdarstellung (als Reste); ist ein Quotient gerade, wird er im nächsten Divisionsschritt den Rest 0 liefern, so dass die zugehörige Zeile gestrichen werden kann.

Das Verfahren weist somit Gemeinsamkeiten mit dem ägyptischen Verfahren auf, aber auch deutliche Unterschiede, die großenteils als Vorteile erscheinen. Das Abbruchkriterium ist etwas einfacher („1 erreicht“ statt „im nächsten Schritt würde eine Zahl größer a erreicht“); auch erhält man die zu streichenden Zeilen nach einem sehr einfachen Kriterium, während man beim ägyptischen Verfahren eine geeignete Summendarstellung aufsuchen muss („probieren“). Andererseits dürfte das Funktionieren des Verfahrens schwerer nachvollziehbar sein als beim ägyptischen; es erscheint etwas geheimnisvoll, weil es auf den ersten Blick nicht „genau“ zu sein scheint (Weglassen der Reste bzw. Runden; die Zeilen sind nicht produkttreu, anders als bei der oberflächlich betrachtet ähnlichen antiproportionalen Zuordnung).

Der historische Ursprung dieser Methode scheint bisher nicht abschließend erforscht zu sein (vgl. Menninger, 1957, S. 172). Man findet sowohl die Bezeichnung „abessinische“ als auch „russische“ Bauernmultiplikation. Ersterer Bezug scheint plausibel aufgrund der Ähnlichkeit zum ägyptischen Verfahren, zweiterer wird unterstrichen dadurch, dass sich in unserem Projekt herausgestellt hat, dass das Verfahren insbesondere bei Schülerinnen und Schülern mit russischem Migrationshintergrund aus der Familie bekannt ist (in Russland also immer noch praktiziert wird).

3.3 Die Gittermethode oder Gelosia

Bei diesem Verfahren legt man ein Schema aus quadratischen Kästchen an mit so vielen Zeilen bzw. Spalten, wie b bzw. a Stellen hat, und trägt dann die Stellen von a an die oberen Spaltenränder, die von b an die rechten Zeilenränder ein. Die Quadrate unterteilt man durch Diagonalen und trägt die Produkte der zugehörigen Stellen von a und b in die Quadrate ein, die Zehnerstelle des Produkts jeweils über und die Einerstelle unter der Diagonale. Im zweiten Schritt addiert man zusammengehörige „Streifen“ auf (also alle Zahlen, die zwischen zwei Diagonalen stehen). Übersteigt eine solche Summe die Zahl 9, muss beim Aufsummieren des nächsten Streifens ein Übertrag beachtet werden (im Beispiel eine 1 im am weitesten links gelegenen Streifen). Die so ermittelten Summen sind die einzelnen Stellen des gesuchten Produkts (s. Abb. 3).

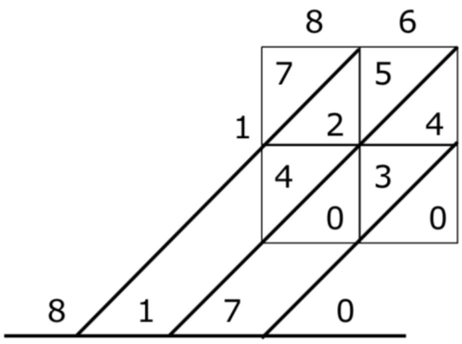

Abb. 3: Gelosia

Dass dies so ist, liegt daran, dass Zahlen im selben Streifen zur selben Zehnerpotenz in der Dezimaldarstellung des Produkts gehören, wie man sich leicht klarmacht. Bei diesem Verfahren muss nur das kleine Einmaleins auswendig beherrscht werden; außer dem Aufsummieren der Streifen wird nichts im Kopf gerechnet. Der Anteil des Verschriftlichten an der Rechnung ist also höher als beim Normalverfahren – allerdings entsprechend auch der Schreibaufwand.

Die Geschichte des Verfahrens lässt sich gut nachzeichnen (Menninger, 1957, S. 261; Tropfke, 1980, S. 214, 218). Das Verfahren stammt ursprünglich aus Indien und hat sich in Spätmittelalter und Renaissance über Arabien auch im Abendland verbreitet. Dort hat es auch den Namen „Gelosia“ erhalten, vgl. Tropfke (1980, S. 219). Es lässt sich gut mit authentischen Quellen im Unterricht erkunden, z. B. mit Auszügen aus einem Werk von Peter Apian (s. u. 4.2).

Das Verfahren sowie die darauf aufbauenden Napierschen Rechenstäbchen (s. u.) könnten den Schülerinnen und Schülern aus dem Grundschulunterricht durchaus bekannt sein, vgl. auch Höhkter und Selter (1998). In unseren Probandengruppen war dies jedoch nicht der Fall.

3.4 Napiersche Rechenstäbe

Die Napierschen (oder häufig auch: Neperschen) Rechenstäbe, benannt nach John Napier (1550–1617), sind ein frühneuzeitliches (und zeitweilig sehr verbreitetes) Rechenhilfsmittel, das auf der Gittermethode aufbaut (zur Geschichte vgl. Menninger, 1957, S. 261). Im Grunde handelt es sich um eine nach Spalten zerschnittene Einmaleinstafel, bei der Zehner und Einer wie oben durch Diagonalen getrennt sind (Abb. 4).

Abb. 4: Neperianische Rechenstäblein, Ulm, 1614; Landesmuseum Baden-Württemberg, Stuttgart.

(Foto von Dr. Bernd Gross; https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30369049)

Ein Produkt kann man nun bestimmen, indem man die benötigten Spalten (Stäbe) heraussucht – die Stellen von a –, diese anlegt und in den benötigten Zeilen (zu den Stellen von b) die diagonalen Streifen aufaddiert. In dieser Variante muss man also noch nicht einmal das Einmaleins auswendig kennen, sondern hat es als Material vor sich. Eine gewisse Schwierigkeit besteht allerdings darin, dass bei mehrstelligem b irrelevante Zeilen beim Aufaddieren übersprungen werden müssen; dies kann man z. B. durch Abdecken zu lösen versuchen. Aber auch das stellengerechte Addieren wird dann erschwert. Außerdem müssen bei in a mehrfach vorkommenden Stellen auch mehrere Exemplare der Stäbe vorliegen; ist dies bei b der Fall, muss man die entsprechende Zeile entsprechend oft berücksichtigen (der Kopfrechenanteil erhöht sich also). Die Methode bietet zahlreiche unterrichtliche

Anknüpfungspunkte, so kommt etwa eigenes Anfertigen in Betracht sowie Thematisieren der Geschichte von Rechenhilfen und -maschinen.

Da es sich bei den Rechenstäben nur um ein Hilfsmittel für die Gelosia-Methode handelt und nicht um eine eigenständige Methode, hätten wir 3.3 und 3.4 auch zusammen behandeln können; die getrennte Betrachtung erfolgt hauptsächlich, weil wir die Rechenstäbchen nur im ersten unserer vier Unterrichtsdurchgänge eingesetzt haben (s. u. 4.1)

3.5 Der indische Rechentrick

Beim indischen Rechentrick handelt es sich um eines aus einer ganzen Reihe von Verfahren („Sutras"), die aus Indien stammen, in diesem Fall um das Sutra „Vertikal und kreuzweise" (vgl. Tirtha und Agrawala 1992, S. 15). Man schreibt a und b untereinander und sucht die kleinste Zehnerpotenz 10^n, die größer als a und b ist (im Beispiel $10^2 = 100$). Nun bildet man die Differenzen $10^n - a$, $10^n - b$ und notiert diese (oder alternativ deren Gegenzahlen) jeweils rechts von a bzw. b. Im nächsten Schritt bestimmt man die Differenzen $a - (10^n - b)$ und $b - (10^n - a)$ (man überzeugt sich leicht, dass in beiden Fällen dieselbe Zahl herauskommt), und notiert das Ergebnis c unter a und b. Schließlich multipliziert man $10^n - a$ mit $10^n - b$ und erhält d. Das gesuchte Produkt $a \cdot b$ ist dann $10^n c + d$, wie man algebraisch leicht nachprüft. Im Beispiel sieht das so aus wie in Abb. 5.

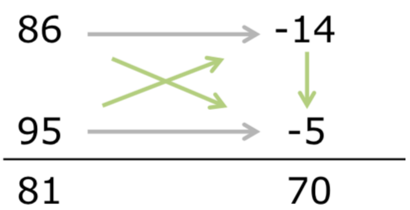

Abb. 5: Indischer Rechentrick

Dieses Verfahren wirkt bei geeignet gewählten Beispielen in zweierlei Hinsicht verblüffend: Zum einen wirkt es verblüffend einfach im Vergleich z. B. zum Normalverfahren, zum andern verblüfft es auch dadurch, dass man nicht ohne weiteres sieht, wieso es überhaupt funktioniert. Dass es funktioniert, folgt zwar leicht aus der oben angedeuteten allgemein-algebraischen Betrachtung; wir sehen aber nicht, wie diese auf das Niveau von Grund- oder Unterstufenschülern heruntergebrochen werden könnte, die das Verfahren zum tatsächlichen Gebrauch beim Rechnen lernen und dann eigentlich ja auch in die Lage versetzt werden sollten, zu verstehen, warum es funktioniert (und nicht nur, dass dies der Fall ist).

Die scheinbare Vorteilhaftigkeit des Verfahrens hängt stark vom gewählten Beispiel ab. Um dies einzusehen, beachte man, dass bei diesem Verfahren im Grunde ein Produkt auf ein anderes zurückgeführt wird (im Beispiel $86 \cdot 95$ auf $14 \cdot 5$). Man kann aber a und b leicht so wählen, dass das neue Produkt schwerer zu bestimmen ist als das alte. Außerdem kann anders als in unserem Beispiel d größer als 10^n ausfallen, was zu Überträgen beim Addieren führt. Innerhalb der indischen Mathematik werden diese Probleme dadurch gelöst, dass es eine große Zahl weiterer Methoden gibt, von denen meistens irgendeine passt, wenn „Vertikal und kreuzweise" sich nicht anbietet. Dies bedeutet aber, dass man den lokalen Vorteil gegenüber dem Normalverfahren mit dem Nachteil erkauft, zahlreiche Verfahren kennen zu müssen (dieser Einwand wäre natürlich auch auf unser Projekt anwendbar, wenn es uns darum ginge, die von uns betrachteten alternativen Verfahren flächendeckend einzuführen).

Insofern ist es nach unserer Auffassung kritisch zu sehen, wenn es so dargestellt wird, als seien an Problemen im Schulfach Mathematik oder gar Angst vor diesem die bei uns üblichen Rechenverfahren schuld und als könne das Erlernen der auf den Sutras aufbauenden Elementararithmetik solche Probleme bzw. Einstellungen leicht beheben. So spricht beispielsweise Bose (2013) ihre potentiellen Leser*innen auf der Titelseite folgendermaßen an: „Do you have maths phobia? Do you feel maths is not your cup of tea? Do you suffer from mathematical anxiety? Do you get panic attacks before maths exams? Vedic mathematics – solve your mathematical problems." Ähnlich klingt auch der Klappentext von Schonard und Kokot (2013). Natürlich ist gegen solche Hilfestellungen grundsätzlich nichts einzuwenden; aber ein Mathematikunterricht, in dem Verfahren eingeübt werden, deren Nachvollzug nicht in der Reichweite der Schülerinnen und Schüler liegt, wird dem aufklärerischen Anspruch von Unterricht nicht gerecht.

Historisch gesehen ist es schwierig, die Ursprünge der Sutras zu klären. Swami Bharati Krishna Tirtha (1884–1960) stellt sie in einem zuerst 1965 posthum erschienenen Buch dar (Tirtha & Agrawala, 1992) und behauptet, sie aus dem Veda herausgearbeitet zu haben; daher werden sie heute meist als vedisch bezeichnet. Diese Behauptung wurde jedoch sehr bald angezweifelt und ist kaum haltbar, vgl. z. B. Shukla (1991). Laut Tropfke tritt das Verfahren in seinen Grundzügen bei Abu al-Wafa` (940–997/8) auf (Tropfke, 1980, S. 215) und in „deutschen Rechenbüchern" (ibid. S. 219), aber eine Verbindung zu Indien wird nicht hergestellt.

3.6 Die chinesische Methode

Diese Methode ist prinzipiell auf natürliche Zahlen mit beliebig vielen Stellen anwendbar, wurde von uns jedoch nur auf zweistellige Zahlen a und b angewandt; daher beschränken wir uns in der folgenden Erklärung auf diesen Fall. Die Einer- und Zehnerstelle von a wird jeweils durch eine Gruppe von parallel liegenden Stäbchen (oder auf dem Papier von Strichen) in entsprechender Anzahl dargestellt (in der Abb. 6 die blauen Striche für 86). Entsprechend werden die Stellen von b dargestellt, allerdings senkrecht zu den Stäbchen für a, so dass Schnittpunkte entstehen (in der Abbildung die grünen Striche für 95). Es gibt hierbei drei Arten von Schnittpunkten: Einerstäbchen mit Einerstäbchen, Einerstäbchen mit Zehnerstäbchen und umgekehrt sowie Zehnerstäbchen mit Zehnerstäbchen (in der Abbildung werden diese Arten durch die roten Trennungsstriche angedeutet). Die Anzahl der jeweiligen Schnittpunkte liefert die Einer-, Zehner- und Hunderterstelle des Produkts. Gibt es an einer Stelle mehr als zehn Schnittpunkte, sind entsprechende Überträge zu berücksichtigen.

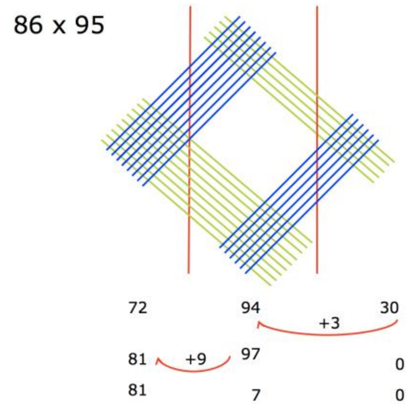

Abb. 6: Chinesische Methode

Es handelt sich also um eine Form des stellenweisen Rechnens, die auf der enaktiven und der ikonischen Ebene angesiedelt ist (weil ikonische Repräsentationen der Zahlen bzw. ihrer Stellen hergestellt und untersucht werden, mal stärker enaktiv – Stäbchen legen – mal weniger stark – Striche auf dem Papier zeichnen); die symbolische Ebene spielt lediglich bei der Darstellung der Faktoren und des Produkts im Zehnersystem eine Rolle. Dies kann je nach Lerngruppe natürlich einen Vorteil des Verfahrens darstellen, dem der Nachteil der eingeschränkten Anwendbarkeit gegenübersteht.

Die historische Einordnung des Verfahrens erweist sich als schwierig; es scheint noch nicht einmal sicher zu sein, ob es aus China oder aus Japan stammt.

3.7 Zusammenfassende Bemerkungen

Für die Auswahl gerade dieser Verfahren in unserem Rahmen gibt es zunächst vor allem den Grund, eine weder zu große noch zu kleine Zahl hinreichend verschiedener Verfahren vorzustellen, die genügend einfach sind, um in einer relativen kurzen Unterrichtssequenz erarbeitet werden zu können, und genügend Anknüpfungspunkte für Vergleich und Reflexion bieten. Hierbei weisen die Gittermethode, die Neperschen Rechenstäbchen sowie die chinesische Methode die größten Parallelen zu unserem Normalverfahren auf, da ihnen ein stellenweises Multiplizieren zu Grunde liegt. Was allen Verfahren inhärent ist, ist der Gedanke, das Multiplizieren auf das Addieren zurückzuführen.

Dass es nicht bei allen Verfahren gleichermaßen gelingt, auch den historischen Kontext zur Verfügung zu stellen, spräche allerdings dafür, nach weiteren möglichen Kandidaten zu suchen. Im Ausblick sprechen wir ein solches Beispiel an, das allerdings weniger einfach zu erlernen ist.

4. Unterrichtskonzeption

Weiter unten möchten wir über die Erfahrungen berichten, die wir mit einem auch historische Aspekte betonenden Einsatz der vorangehend besprochenen Verfahren im Unterricht mit Blick auf die eingangs genannten Ziele machen konnten. Doch zuvor sollten wir beschreiben, wie dieser Unterricht konzipiert war.

4.1 Zuschnitt der einzelnen Projekte

Es fanden insgesamt vier verschiedene Unterrichtsprojekte statt: in je einer sechsten Klasse des evangelischen Gymnasiums Meinerzhagen und eines allgemeinbildenden Gymnasiums in Wuppertal sowie zweimal im Kurs für 11-14jährige „Das Zahlengeheimnis“ der Junior Uni Wuppertal. Tabelle 1 gibt einen genaueren Überblick über die in den einzelnen Durchgängen jeweils untersuchte Stichprobe.

Anzumerken ist, dass die unterschiedlichen Durchgänge des Projektes z. T. durch unterschiedliche Lehrpersonen erfolgten. Durchgang 1 wurde von Ralf Krömer durchgeführt, Durchgang 2 erfolgte im Rahmen einer Masterarbeit und die Durchgänge 3 sowie 4 wurden von Sarah Beumann durchgeführt. Die drei Versuchsleitenden sind nicht nach einem einheitlichen Versuchsleitermanual vorgegangen, sondern haben die Durchführung jeweils etwas anders gestaltet (dazu unten mehr). Wie Tabelle 1 zu entnehmen ist, wurden hierbei auch die jeweils eingesetzten Verfahren leicht variiert. Der Aufbau und die Lernziele waren allerdings in allen Durchgängen ähnlich.

Die Auswertung im Blick auf die oben formulierten Ziele erfolgte einerseits qualitativ über Schülerstatements, andererseits über eine Analyse von Schülerprodukten. Datengrundlage sind:

- eine teilnehmende Beobachtung des Unterrichts durch die direkte Lehrperson;
- Schülerprodukte in schriftlicher Form;
- bei den Durchgängen 3 und 4 auch Audiosequenzen des gehaltenen Unterrichts und zugehörige Transskripte.

In den Durchgängen 1 und 2 sollten Arbeitsblätter in Partnerarbeit bearbeitet werden; daraus ergibt sich eine Gesamtzahl von 15 bzw. 12 verschiedenen Schülerprodukten aus diesen Durchgängen.

Um eine begründete Reflexion über die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der einzelnen historischen Verfahren und des Normalverfahrens zu gewährleisten, wurde das unterrichtliche Setting für die Durchführung am außerschulischen Lernstandort dahingehend verändert, dass neben den Arbeitsblättern zu den einzelnen historischen Rechenverfahren eine zweite Arbeitsphase geschaltet wurde. In dieser Arbeitsphase sollten die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Rechenaufgaben jeweils mit allen gelernten Methoden rechnen, sodass im Anschluss eine fundierte Reflexion über Gemeinsamkeiten und Unterschiede stattfinden konnte. Allerdings erwies sich, dass das Wiederholen der gleichen Aufgabe mit verschiedenen Verfahren auch Nachteile hat, zum einen wird es irgendwann langweilig, zum anderen ist der Vergleich zwischen den Verfahren dann auch nicht ganz fair, weil das Endergebnis sowie wichtige Ergebnisse von Zwischenrechnungen irgendwann bekannt sind.

Bei der Formulierung unserer Arbeitsaufträge sind wir von der Überlegung ausgegangen, dass mathematisch orientierte Reflexion auf Verschiedenes abstellen kann. Zum einen kann sie das Verfahren in Isolation betreffen und hier z. B. Fragen der Korrektheit und der Anwendbarkeit des Verfahrens: Liefert das Verfahren das richtige Ergebnis? Kann es auf beliebige Zahlen angewandt werden? Wird zu den Antworten auf diese Fragen eine Begründung verlangt, kann das Erarbeiten der Begründung zurückwirken auf die Reflexion, denn um Korrektheit oder Anwendbarkeit jeweils stichhaltig zu begründen, muss man sich die mathematischen Eigenschaften der verwendeten Zahlen, Zahldarstellungen und Operationen bis zu einem gewissen Grade bewusst machen und diese ausformulieren. Diesem Anspruch sind bei unseren Probandengruppen Grenzen dadurch gesetzt, dass sowohl Kenntnis der Fachsprache als auch Bewusstsein für die Stichhaltigkeit einer Begründung erst rudimentär vorhanden sind – beides sind langfristige Lernziele. Bei dem in den ersten beiden Durchgängen praktizierten Einsatz von Arbeitsblättern ohne die Möglichkeit der Intervention der Lehrkraft (etwa in Form von Nachjustieren durch Hinterfragen von Begründungslücken) kann man zweifellos nur Ansätze stichhaltiger Begründungen erwarten.

Eine andere Möglichkeit der Reflexion besteht darin, verschiedene Verfahren miteinander zu vergleichen, etwa über Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Vorgehensweise und über den jeweiligen Schreib-, Rechen- und Gedächtnisaufwand. Dieser Vergleich kann dann in einer vergleichenden Bewertung der Verfahren münden: einfacher, schneller etc., Identifikation von Vor- und Nachteilen. Auch hier gilt wieder: Soll der Vergleich begründet erfolgen, müssen die mathematischen Eigenschaften der verwendeten Zahlen, Zahldarstellungen und Operationen bis zu einem gewissen Grade bewusstgemacht und ausformuliert werden. Genau eine solche Auseinandersetzung soll durch die Reflexionsaufträge angestoßen werden.

Die Entwicklung des Arbeitsmaterials stand unter dem Leitgedanken, die Wirkung des historischen Kontexts möglichst sichtbar werden zu lassen. Aus diesem Grund wurden die Arbeitsaufträge dahingehend zugespitzt, dass die Aufgaben nicht noch zusätzlich in irgendeinen Sachkontext eingekleidet waren, sondern als reine Rechenaufgaben daherkamen – die allerdings mit historischen Verfahren zu bearbeiten waren.

Durchgang	Ort	Anzahl der Probanden	Eingesetzte Verfahren
1	Gymnasium Meinerzhagen	31	3.1, 3.2, 3.3, 3.4
2	Gymnasium Wuppertal	24	3.1, 3.2, 3.3, 3.6
3	Außerschulischer Lernstandort	8	3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6
4	Außerschulischer Lernstandort	12	3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6

Tab. 1: Übersicht über die Stichprobe

4.2 Der Unterrichtsablauf

Im Folgenden wird zunächst das Vorgehen in Durchgang 1 und 2 beschrieben; Abweichungen davon in den Durchgängen 3 und 4 folgen weiter unten.

Vor der Einführung des **ägyptischen** Multiplikationsverfahrens wurden einige Bilder zur frühen Hochkultur der Ägypter gezeigt; insbesondere wurden die hieroglyphischen Zahlzeichen vorgestellt und ein wenig mit ihnen gearbeitet (Entzifferung einer Inschrift und Darstellen der eigenen Postleitzahl in Hieroglyphen). Dieser kurze Kontakt mit authentischem Material konnte den historischen Kontext nur anreißen und sollte vor allem der Motivation dienen. Im nächsten Schritt wurde dann am Beispiel 13 · 15 von der Lehrkraft an der Tafel gezeigt, wie die Ägypter multipliziert haben – ab hier wieder mit heutigen arabischen Zahlen geschrieben, um den Blick auf das Verfahren zu lenken (es ist zu vermuten, dass die erwünschte Reflexionsebene bei einer rein hieroglyphischen Behandlung unerreichbar gewesen wäre). Die Schülerinnen und Schüler sollten hierbei das Verfahren dem Beispiel entnehmen und dann die folgenden Aufgaben bearbeiten:

1) Rechnet 49 · 103 ägyptisch, und probiert auch eigene Zahlen aus.
2) Wie geht man allgemein vor? Beschreibt das Verfahren mit euren eigenen Worten.
3) Funktioniert das ägyptische Verfahren immer? Begründet eure Antwort.
4) Vergleicht das ägyptische Verfahren mit unserem normalen Verfahren der schriftlichen Multiplikation. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es? Welches findet ihr besser, und warum?

Zur Behandlung des **Bauernmultiplikation** wurde unverändert der Kasten aus dem „Lambacher-Schweizer“ für die Klasse 5 (Hußmann et al., 2007, S. 94) übernommen. Strenggenommen kann man nicht behaupten, hier sei der historische Kontext thematisiert worden („eine alte Geschichte erzählt...“). Das Material wurde in Durchgang 1 vor allem deswegen verwendet, um an das in der Klasse eingeführte Schulbuch anzuknüpfen. Trotz der fehlenden historischen Einbettung kann man zumindest eine mathematisch orientierte Reflexion auch in Bezug auf dieses Beispiel anstoßen; die Konfrontation mit dem „Fremden“ funktioniert auch hier. Einige Beobachtungen dazu werden unten genannt.

Die **Gelosia-Methode** sollte anhand einer authentischen Quelle erarbeitet werden, nämlich eines Ausschnitts aus dem Rechenbuch *Eyn newe unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung* von Peter Apian (Ingolstadt 1527). Zur Einführung in den Kontext wurden wieder Bilder gezeigt, und zwar zunächst das Titelblatt des Buches. Dies gab (ähnlich wie bei den Hieroglyphen) Anlass zur Entzifferung; unter anderem sollten Autor und Ort von den Schülern selbst herausgefunden werden. Dies war aufgrund der Eigenheiten der Frakturschrift und der altertümlichen Rechtschreibung und Ausdrucksweise keine ganz leichte Aufgabe – aber gerade dadurch sollte natürlich das Historische an dieser Quelle unterstrichen werden.

Es wurde dann noch ein Kupferstich-Portrait Apians gezeigt und schließlich Apians Beispiel einer Gelosia-Rechnung (S. 231). Zunächst sollte der Einleitungssatz entziffert werden – wie beim Titelblatt um neugierig zu machen; interessant war hier z. B., dass niemand das Wort „fürwitzig“ kannte. Es folgten ähnliche Fragen wie auf dem Arbeitsblatt zur ägyptischen Multiplikation.

Das Arbeitsblatt enthielt ferner noch einen Teil, in dem die ostarabischen Ziffern kennengelernt werden sollten und eine in diesen Ziffern geschriebene Gelosia-Multiplikation entziffert werden sollte (aus Menninger, 1957, S. 261). Leider kamen im Rahmen des Durchgangs nur noch wenige Teams dazu, diesen Teil zu bearbeiten; das war insbesondere deswegen bedauerlich, weil deutlich zu spüren war, dass dieser Teil für Schülerinnen und Schüler mit islamischer Religion sehr motivierend war.

Im Durchgang 1 kamen schließlich noch die **Neperschen Rechenstäbchen** vor; die Beschäftigung mit diesen begann mit einigen Bildern zu John Napier und zu Rechenstäbchen aus der Sammlung eines Museums. Daraufhin bekamen die Schülerinnen und Schüler eine fertig ausgedruckte Vorlage für die Anfertigung eigener Stäbchen zum Ausschneiden. Anschließend sollten fünf Aufgaben mit den Stäbchen gerechnet werden: 124 · 6, 215 · 23, 38 · 46, 116 · 3 und 105 · 78. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich auch zu Problemen äußern; solche treten bei den drei letzten Aufgaben auf: Beim Multiplikand 46 muss man zwei nicht benachbarte Zeilen addieren, beim Multiplikator 116 benötigt man die (nur einmal vorhandene) Einerspalte doppelt und beim Multiplikator 105 würde man eine (nicht vorhandene) Nullspalte benötigen. Zu diesen Fragen wurde ein Unterrichtsgespräch durchgeführt, und zwar mit Hilfe von Stäbchen auf Klarsichtfolie, mit denen einzelne Schülerinnen und Schüler die Rechnungen am Overheadprojektor vorführen konnten. Klar ist, dass diese Unterrichtsdiskussion allein die Problematik des Materials der Neperschen Stäbchen, nicht jedoch die Funktionsweisen der dahinterstehenden Gittermethode reflektiert hat.

In Durchgang 2 wurden die Rechenstäbchen durch die chinesische Methode ersetzt. Grund dafür war, dass es uns wichtiger erschien, ein weiteres wesentlich verschiedenes Verfahren mit hineinzunehmen, statt nur eine Variation der Gittermethode in Form der Neperschen Stäbchen.

Ähnlich wie in die Durchgängen 1 und 2 wurden auch die Durchgänge 3 und 4 unterrichtlich eingebunden. Der größte Unterschied bei der Durchführung war der Lernstandort, da Durchgang 3 und 4 an einem außerschulischen Lernstandort stattgefunden haben und somit vorzugsweise interessierte Schülerinnen und Schüler teilgenommen haben. Die beschriebenen Aufgaben waren soweit identisch, nur dass hierbei statt der Rechenstäbchen sowohl die chinesische Methode (wie bei Durchgang 2) als auch der indische Rechentrick behandelt wurden. Bei den beiden letzten Methoden gab es keinerlei historische Verankerung, die Verfahren wurden erklärt und durchgeführt. Im Anschluss an die Behandlung der einzelnen Themen sollten die Schülerinnen und Schüler verschiedene Multiplikationsaufgaben gleichzeitig mit allen neuen Methoden rechnen, sodass eine anschließende Reflexion über Gemeinsamkeiten und Unterschiede stattfinden konnte. Diese Reflexion wurde von den Schülerinnen und Schülern nicht schriftlich festgehalten, sondern als Unterrichtsgespräch gestaltet. Datengrundlage ist hier ein Transskript dieses Unterrichtsgespräches; welche Fragen angesprochen wurden, geht aus den unten wiedergegebenen Auszügen aus diesem Transskript hervor.

5. Erfahrungen

Im Folgenden werden die wichtigsten Erfahrungen aus den Unterrichtsprojekten nach den beiden Zielen gegliedert vorgestellt. Die im Folgenden wiedergegebenen anonymen Äußerungen stammen aus den Durchgängen 1 und 2 (denn dort bilden anonym abgegebene Arbeitsblätter die Datengrundlage). Die Orthographie wurde in diesen Auszügen beibehalten. Die Äußerungen aus Durchgang 3 und 4 beruhen auf einem Transskript von Audiosequenzen.

Der Großteil der Schülerinnen und Schüler kam mit der Art der Arbeitsaufträge, selbst mit den Reflexionsfragen, gut zurecht; gelegentlich ist aber auch festzustellen, dass die Antworten von benachbarten Teams abgeschrieben wurden – hier wurde also als wichtiger angesehen, dass am Schluss auch etwas dasteht, als dass man selbst eine Antwort auf die jeweilige Frage findet. So ist es meist auch zu erklären, wenn bestimmte Antwortkategorien in einem Durchlauf relativ häufig, in den anderen jedoch gar nicht auftreten. Uns kommt es in unserer Analyse aber ohnehin mehr auf das Spektrum der verschiedenen Antworten an und erst in zweiter Linie auf die Häufigkeiten der Nennungen.

5.1 history as a tool: Verfahren vergleichen und reflektieren

Wenn man sich dafür interessiert, inwieweit die Probanden durch die Aufgaben zu mathematisch orientierter Reflexion angeregt werden, sind bereits die Aufgaben relevant, bei denen es darum geht, die jeweiligen Methoden mit eigenen Worten zu beschreiben. Hierzu liegen aus den Durchgängen 1 und 2 insgesamt 27 Schülerprodukte zur ägyptischen und 24 zur Gelosia-Methode vor.

Bei der Analyse dieser Schülerprodukte fällt auf, dass viele Schülerinnen und Schüler noch nicht in dem Maße über die Fachsprache verfügen, wie es für eine vollständige und gut nachvollziehbare Beschreibung eines Verfahrens eigentlich notwendig wäre. Häufig fehlt das Wort „Faktor", und statt „Stelle" oder „Ziffer" wird häufig einfach (erste, zweite usw.) „Zahl" gesagt. Viele Probanden vermeiden auch von vorneherein allgemeine Formulierungen, sondern erklären direkt am Beispiel. Hierzu passt die Beobachtung aus der Behandlung der Bauernmultiplikation, dass die sprachliche Erklärung des Verfahrens im Schulbuch von den meisten Schülerinnen und Schülern eher als zusätzliche Schwierigkeit erlebt wurde und sie sich ausschließlich auf das Rechenbeispiel zur Erarbeitung des Verfahrens stützten. Schülerinnen und Schüler können also durchaus in der Lage sein, mit einem Verfahren zu arbeiten, ohne dass sie zugleich auch in der Lage sind, es zu versprachlichen oder mit einer Versprachlichung umzugehen; letzteres stellt eine zusätzliche, offenbar in der sechsten Jahrgangsstufe noch kaum erworbene Fertigkeit dar. Dieser Befund ist auch für die anschließenden Schülerprodukte zur Reflexion zu berücksichtigen.

Die Aufgabe 3) zum ägyptischen Verfahren (Durchgang 1 und 2, s. o. 4.2) wurde in der Hoffnung gestellt, dass die Schülerinnen und Schüler sich Gedanken darüber machen, ob durch den Verdoppelungsprozess auf der linken Seite eigentlich jede natürliche Zahl mit geeigneten Zeilen hergestellt werden kann (so wie es im Einführungsbeispiel für die 13 gelingt). Dass dies in der Tat so ist, dahinter steckt ja, wie oben schon bemerkt, dass jede natürliche Zahl eine (eindeutige) Darstellung im Zweiersystem hat (was den Probanden jedoch in aller Regel nicht bekannt war). Ansatzweise wurde dies immerhin von sechs Teams erkannt; hier die Antworten:

> „Ja, weil man immer Zahlen weglassen kann und deshalb gibt es viele Möglichkeiten"

> „Ja, weil auch wenn man alle Zahlen nimmt z. B. 1 + 2 + 4 + 8 = 15 dann erweitert man noch einmal mal 2 = 16. Man kann keine Zahl auslassen"

> „Ja es funktioniert immer da man alle Zahlen bilden kann"

> „Ja, weil man mit den verdoppelten Zahlen jede Zahl rauskriegt“

> „Das ägyptische Verfahren funktioniert immer, weil man spätestens wenn man bis [zu] der Zahl verdoppelt hat auf die Zahl kommt. Also es kann lange dauern, aber es funktioniert“

> „Ja, wir glauben, dass das Ägyptische Verfahren immer funktioniert, da man im Prinzip auf jede Zahl kommen kann wenn man die „Verdopplungs-Reihe“ immer weiter führt und dann bestimmte Zahlen daraus addiert“

Bei einem weiteren Team deutet sich ein gewisses Verständnis der Rolle des Zweiersystems in der Beschreibung des Verfahrens an, wenn es dort heißt „man muss auf der linken Seite von 1 immer weiter verdoppeln bis ca. zur Hälfte“. Ein anderes Team verneint zwar die Frage, jedoch zeugt die Begründung trotzdem von einer Reflexion des Verfahrens:

> „Es funktioniert nicht immer, da man keine Zahlen doppelt nehmen darf, und das eventuell irgendwann nötig ist um eine hohe Zahl zu erreichen“

(hier wird natürlich übersehen, dass man, anstatt eine Zeile zweimal zu nehmen, ebenso gut die nächste Zeile einmal nehmen kann.) Viele der übrigen Teams suchten die Antwort auf die Frage im Zusammenhang mit Besonderheiten der hieroglyphischen Zahlschrift (der begrenzte verfügbare Zahlenraum wurde fünfmal genannt, das Fehlen einer Null interessanterweise viermal pro und zweimal contra). Dies ist natürlich ein unerwünschter, aber vorhersehbarer Nebeneffekt der vorherigen Besprechung der Hieroglyphen.

Auf die Frage nach den Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen ägyptischem und Normalverfahren gab nur ein Teil der Teams Antworten; darunter waren manche, die das intendierte Reflektieren durchaus erkennen lassen: So wurde als Gemeinsamkeit zweimal genannt, dass das Multiplizieren letztlich jeweils auf das Addieren zurückgeführt wird, und einmal, dass beide Verfahren für beliebige Zahlen funktionieren; als Unterschied wurde (neben der Schreibweise) genannt, dass für das ägyptische Verfahren kein Einmaleins erforderlich ist, nur Verdoppeln. Auch die Antworten auf die Frage nach besser und schlechter sind interessant. Insgesamt sprachen sich von den 19 Teams, die eine Angabe machten, 16 für unser Verfahren und 3 für das ägyptische aus, wobei die jeweiligen Begründungen teilweise wieder Reflexion erkennen lassen: Pro ägyptisch wurde zweimal die größere Übersichtlichkeit angeführt und einmal die Tatsache, dass man nur verdoppeln und addieren muss; das Normalverfahren galt meist als leichter oder nicht so kompliziert (was wohl ein Effekt der größeren Vertrautheit ist); mehrfach wurde aber auch gesagt, es sei kürzer oder der Schreibaufwand sei geringer. Zweimal wurde sinngemäß darauf hingewiesen, dass man die Teilprodukte in einem relativ kleinen Zahlenraum bildet, während man beim ägyptischen Verdoppeln natürlich mit beliebig großen zu verdoppelnden Zahlen zu tun bekommt. Einmal wurde auch darauf hingewiesen, dass man beim ägyptischen Verfahren auf ein Kontrollieren des Abbruchkriteriums angewiesen ist:

> „Ich finde unsers besser weil im Ägyptischen muss mann erst mal alles doppelt nehmen und dann überlegen ob das schon ausreicht und so!“

In den Durchgängen 1 und 2 sollte die Bauernmultiplikation mit dem ägyptischen Verfahren verglichen werden. Mehrfach wurde hier gesagt, die Bauernmultiplikation sei weniger kompliziert. Diese Beobachtung der Probanden steht im Einklang mit unserem Vergleich aus 3.2 und deutet auf eine erfolgte Reflexion hin. (Trotzdem wurde die Zeilenauswahl in beiden Durchgängen zusammen sechsmal falsch gemacht, bei der ägyptischen Rechnung nur einmal. Der Vergleich ist allerdings etwas unfair, da hier nicht nur ein Beispiel betrachtet, sondern Päckchenrechnen betrieben wurde und dadurch vermutlich eine gewisse Flüchtigkeit Einzug gehalten hat.) Erwähnenswert ist noch, dass ein solcher Vergleich zweier neu gelernter Verfahren untereinander auch dazu führen kann, dass man Vorteile eines der Verfahren erkennt, die beim Vergleich mit dem Normalverfahren nicht auffallen. So äußert ein Team:

> „Wir finden das Ägyptische Verfahren einfacher da die eine Reihe beim Ägyptischen Ver. immer die selbe ist -> wenn man sie lernt dann muss man sich nur noch eine Reihe ‚errechnen‘“

Gemeint ist hier natürlich die linke Spalte mit der Reihe der Zweierpotenzen.

Die Reflexionsfragen zur Gelosia bieten ein ähnliches Bild wie beim ägyptischen Rechnen. Von den 24 in Durchgang 1 und 2 insgesamt entstandenen Beschreibungen des Verfahrens mit eigenen Worten müssen 17 als unvollständig angesehen werden und 5 als fehlerhaft (weil z. B. „Spalten“ statt „diagonale Streifen“ addiert werden sollen). Die Frage zu Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen Gelosia-Methode und Normalverfahren führte auf zahlreiche Feststellungen. Bei den Gemeinsamkeiten wurden genannt, dass in beiden Fällen am Schluss addiert wird bzw. die Reihenfolge von Malrechnen und Plusrechnen übereinstimmt und dass „jede Zahl einzeln gerechnet“ (also stellenweise gearbeitet) werden muss. Exemplarisch sei die folgende Äußerung zitiert:

„Eigentlich ist das Verfahren gleich, man rechnet nämlich nicht mit dem ganzen, sondern mit vielen kleinen Aufgaben"

Als Unterschied wurde häufig die Schreibweise genannt, zweimal aber auch, dass „nur Einer rechnen" erforderlich ist.

Besser fanden 16 Teams das Normalverfahren, 4 die Gelosia, zwei Teams fanden beide gleich gut bzw. waren unentschieden, und zwei machten keine Angabe. Zur Begründung wurde wieder meist angeführt, dass das Normalverfahren einfacher oder schneller bzw. die Gelosia komplizierter oder aufwändiger ist (16), es wurde aber auch genannt, dass man bei der Gelosia nicht so viel im Kopf machen muss (einmal), dass sie mehr Übersicht bietet (dreimal) und sogar, dass sie mehr Spaß macht (einmal). Ein anderes Team wies allerdings wiederum darauf hin, dass auch bei der Gelosia noch im Kopf gearbeitet werden muss, nämlich bei den abschließenden Additionen.

Eine Reflexion des Neper-Verfahrens in Durchgang 1 konnte aufgrund der dort gewählten Arbeitsweise aus Zeitgründen nicht stattfinden. Im Durchgang 2 wurde dieses Verfahren durch die chinesische Methode ersetzt, die wieder im gewohnten Arbeitsblattformat bearbeitet wurde. Entsprechend sollte dort auch dieses Verfahren mit dem Normalverfahren verglichen werden (Stichprobengröße 9). Fünfmal wurde genannt, dass es kaum oder keine Gemeinsamkeiten gibt. Zweimal wurde explizit festgestellt, dass die Methode nur für kleine Zahlen funktioniert; hier eine der Äußerungen:

„Meinung: die Methode ist blöd, weil man nur die 10er ausrechnen kann"

Auch die Vertrautheit als Vorteilhaftigkeit begegnet uns wieder:

„Ich finde unser Verfahren besser da ich es so gelernt habe"

Die folgende Äußerung bringt die Besonderheit der chinesischen Methode deutlich auf den Punkt:

„Beim Rechnen mit 10er Zahlen finden wir die chinesische Methode besser, weil […] man nicht wirklich rechnen muss"

Weil die Bearbeitung der Reflexionsfragen in den Durchgängen 3 und 4 nicht in Form von Arbeitsblättern, sondern in Interviewform stattfand, bietet es sich im Folgenden an, aufschlussreiche Ausschnitte aus dem Transskript des Mitschnitts wiederzugeben:

Interviewer: Was glaubt ihr: Können die neuen Rechenmethoden auch für beliebige Zahlen angewendet werden?

Laura: Ich glaube schon, die anderen müssen die Aufgaben ja auch mit ihren Methoden gerechnet haben können.

Lauras Argument ist also kein mathematisches, sondern ein pragmatisches: Weil die Rechenmethoden gängig waren, müssen sie wohl für beliebige Zahlen funktionieren.

Bei den Durchgängen 3 und 4 beziehen sich viele der Antworten bezüglich Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen den verschiedenen historischen Methoden untereinander vor allem auf die Schreibweise. Sobald es allerdings um den Vergleich mit dem Normalverfahren geht, kommen auch im engeren Sinne mathematische Beobachtungen zutage, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sandra: Naja also ich finde die Gittermethode hat so am direktesten was mit unserer Methode zu tun, weil man da halt auch in Schritten rechnet und eigentlich sind die anderen, also dann (Pause), wir rechnen nur wenn eine Zahl übertragen wird plus, bei den anderen rechnet man viel mehr Plus, die rechnen grundsätzlich plus.

Die folgende Passage betreffend Vor- und Nachteilen enthält zahlreiche interessante Gedanken der Schülerinnen und Schüler zu verschiedenen Verfahren. Sie sei daher in einiger Länge wiedergegeben:

Niklas: Ja manchmal lohnt sich das nicht eine andere Rechenart anzuwenden.

Interviewer: Wieso? Wann lohnt sich das denn nicht?

Leon: Naja z. B. bei ägyptisch und 15 mal 16 muss ich zwar nur bis 8 rechnen, aber dann alles markieren.

Sandra: Ja und in der linken Spalte waren da auch keine geraden Zahlen, die dann weggestrichen wurden, wenn ich mit der Bauernmultiplikation rechne.

Laura: Und bei der Aufgabe bei der Gittermethode gab es viele Nullen, das war dann super easy.

Interviewer: Und was ist mit dem indischen Rechentrick?

Niklas: Hör mir auf, der ist blöd. Das war voll schwer bei 15 mal 16. Weil man hat dann -69 und 7140 raus, wie kommt man denn da auf 240?

Sandra: Naja ich hatte dann halt Minus raus und so immer das Gefühl, dass ich falsch gerechnet habe, weil Minus geht ja nicht.

Laura: Ich fand´s viel schwieriger, dass ich rechts höhere Zahlen hatte als vorher bei 15 und 16. So musste ich 85 mal 84 rechnen, so braucht man quasi noch einen weiteren indischen Rechentrick um das auszurechnen.

Niklas: Ich sag ja, voll blödsinnig.

Interviewer: Was ist denn bei der 99 mal 11?

Daniel: Bei ägyptisch geht man da bis zur 64 und muss so viel verdoppeln.

Leon: Bei der Bauernmethode muss man da auch genauso viel verdoppeln, das war auch schwierig und viel.

> Interviewer: Und das Halbieren?
>
> Daniel: Das war auch blöd, da hier viele Zahlen ungerade waren.
>
> Laura: Gitter war hier voll einfach, war ja immer das gleiche und symmetrisch. Sehr 0 und 9 reich.
>
> Daniel: Indisch war für mich hier einfach, weil man auf glatte Zahlen kommt und die 99 ja auch nicht weit von der 100 entfernt ist. Und die Multiplikation ist dann auch einfach, weil man ja was mal 1 hat.

Man sieht: Es gelingt den Schülerinnen und Schülern durchaus, die Vor- und Nachteile der einzelnen Methoden deutlich zu identifizieren (jedenfalls bei geeignet gewählten Beispielaufgaben). So erkennen Niklas und Sandra, dass der indische Rechentrick seine Grenzen besitzt, wenn sie den Umgang mit negativen Zahlen benennen. Es ist beeindruckend, auf wie viele der Kritikpunkte zum indischen Rechentrick aus Abschnitt 3.5 die Schülerinnen und Schüler von selbst kommen, nachdem sie aufgefordert wurden, zu reflektieren und zu beurteilen. Auch die Äußerungen von Daniel und Leon zu den Grenzen des Verdopplungsverfahrens zeigen, dass sich die Schülerinnen und Schüler mit der sinnvollen Anwendung verschiedener Verfahren auseinandergesetzt haben. In diesen Fällen dient die Mathematikgeschichte in Form der historischen Verfahren als Fundus, um mathematisches Handeln zu reflektieren. Sie ist nicht Bildungsziel an sich, sondern kann Reflexionsprozesse anstoßen.

In den Durchgängen 1 und 2 wurde zum Abschluss der Intervention noch ein Feedbackfragebogen eingesetzt, der individuell auszufüllen war (Stichprobengröße 31 bzw. 19). Eine der dort gestellten Fragen erscheint uns im vorliegenden Kontext relevant; diese Frage lautete: „Welche Rechenmethode fandest Du am leichtesten/am schwersten?“ Hier waren keine Antwortmöglichkeiten vorgegeben, sondern nur Platz für eigene Antworten, so dass auch Mehrfachnennungen möglich waren. Überraschenderweise wurden alle erlernten Methoden sowohl unter „am leichtesten“ als auch unter „am schwersten“ genannt. Interessant dürfte eher das jeweilige Zahlenverhältnis der Nennungen als „am leichtesten“ zu denen als „am schwersten“ sein. Hier ist es sinnvoll, die Durchgänge 1 und 2 getrennt zu betrachten, weil die jeweils eingesetzten Methoden bei den Neper-Stäbchen und der chinesischen Methode voneinander abweichen.

In Durchgang 1 waren die Verhältnisse wie folgt: Ägyptisch 9 : 12, Bauernmultiplikation 14 : 3, Gelosia 3 : 9, Neper-Stäbchen 5 : 10. Das besonders günstige Verhältnis bei der Bauernmultiplikation könnte damit zusammenhängen, dass die Methode manchen Kindern, insbesondere solchen mit einem russischen Migrationshintergrund, bereits bekannt war. Im Durchgang 2 ergab sich bei insgesamt 19 ausgefüllten Bögen ägyptisch 2 : 4, Bauernmultiplikation 2 : 4, Gelosia 1 : 10 und chinesisch 15 : 0. Die chinesische Methode wurde also klar als leichteste und die Gelosia-Methode klar als schwerste wahrgenommen, während die übrigen Methoden meist in die Mitte eingeordnet wurden.

5.2 history as a goal: Historizität im Rahmen lebensweltorientierter Reflexion thematisieren

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir untersucht, inwieweit es gelungen ist, durch den Einsatz der historischen Multiplikationsverfahren eine mathematisch orientierte Reflexion anzustoßen. Wie schon dargelegt wurde, hatte das Projekt noch ein weiteres Ziel, nämlich, bei den Schülerinnen und Schüler eine Erkenntnis der Historizität der Mathematik sowie ein Nachdenken über diese Historizität anzustoßen. Um den Unterricht nicht zu überfrachten, was insbesondere hätte dazu führen können, die mathematische Auseinandersetzung mit den Methoden allzu oberflächlich geraten zu lassen, kamen allerdings nur wenige Elemente mit Bezug zu diesem weiteren Ziel zum Einsatz.

Im Rahmen eines abschließenden Feedbacks sollten die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler insbesondere folgende Frage beantworten: „Wofür könnte es nützen, wenn Du etwas darüber lernst, wie die Menschen früher gerechnet haben?“ Diese Formulierung wurde gewählt in der Annahme, dass Schülerinnen und Schüler gerne bereit sind, ihre Vorstellungen zur Nützlichkeit eines Lerngegenstands zu äußern. Es handelt sich um eine Frage, die lebensweltorientierte Reflexion anstoßen soll, und zwar soll konkret über den Bezug der Gegenwart des/der Einzelnen zur Geschichte der Mathematik („früher“) nachgedacht werden. Mit der gewählten Fragestellung wird natürlich die Historizität der Mathematik nur indirekt thematisiert; sie dürfte aber der Altersgruppe angemessener sein als eine Fragestellung, die direkter, aber auch abstrakter, auf das Bild von Mathematik als wandelbar oder nicht abzielt. (Inwiefern unsere Wahl der Fragestellung die Aussagekraft unserer Daten in Bezug auf das Ziel 2 einschränkt, besprechen wir weiter unten im Fazit.)

Wir werden die Antworten auf diese offen gestellte Frage grob in Kategorien einteilen. Die Kategorien haben sich aus unserem Bemühen ergeben, die Äußerungen zu gruppieren und wiederkehrende Gedanken zu identifizieren.

1) Nutzen als Werkzeug
2) Nutzen in der weiteren Schullaufbahn (2a: im Fach Mathematik; 2b: in anderen Fächern)
3) Nutzen im Berufsleben
4) Selbstdarstellung
5) Allgemeinbildung
6) Historisches Wissen
7) Interkultureller Nutzen
8) Interesse als Nutzen
9) Keinerlei Nutzen
10) Nutzen unklar

Wir werden im Folgenden die einzelnen Kategorien kurz diskutieren und jeweils charakteristische Schüleräußerungen wiedergeben. Im Zuge dessen wird deutlich werden, dass es sich nur um eine grobe Kategorisierung handelt, insofern viele Äußerungen zu mehreren Kategorien passen. Am Ende des Abschnitts sind die Nennungshäufigkeiten in Tabelle 2 zusammengestellt.

1) Nutzen als Werkzeug. Hier wird als Nutzen beschrieben, dass nunmehr alternative Methoden zur Verfügung stehen und eingesetzt werden können, wodurch gegebenenfalls eine Rechnung (eine Aufgabe) einfacher zu bewältigen ist. Ein Bezug zur eigenen Biographie/Schülerrolle etc. wird dabei nicht hergestellt. Äußerungen in dieser Richtung lauten:

> „Es könnte helfen, dass einem das Rechnen leichter fällt"

> „Man kann auch mal anders rechnen"

> „vielleicht kann man ein paar Rechenarten heute noch gebrauchen"

> „dass man vielleicht irgendwann so eine Aufgabe rechnen muss, dann hat man einen Vorteil"

2) Nutzen in der weiteren Schullaufbahn. Auch in dieser Kategorie geht es um den Nutzen der Methode als Werkzeug beim Rechnen; allerdings geht es hier konkreter darum, dass sich die Probanden selbst vor allem in der Rolle als Schülerinnen und Schüler wahrnehmen und dementsprechend der Nutzen, die Methoden zu kennen, im möglichen Einsatz in zukünftigen Unterrichtseinheiten und Klassenarbeiten gesehen wird. Bei diesen Äußerungen steht also das Lernen für die Schule, insbesondere für damit verbundene Leistungskontrollen, im Vordergrund; ein Nutzen darüber hinaus wird nicht in den Blick genommen.

> Sandra: „Jetzt kenne ich neue Methoden, mit denen ich auch mal einfacher rechnen kann und so in Arbeiten auch mal schummeln kann"

> Leon: „Damit kann ich sicher meine Lehrerin beeindrucken"

Neben dem Fach Mathematik wird ein solcher schulischer Nutzen allerdings auch im Fach Geschichte gesehen.

3) Nutzen im Berufsleben. Äußerungen aus dieser Kategorie blicken über die Schulzeit hinaus und nehmen das spätere Leben, insbesondere das Berufsleben oder Studium, in den Blick. Ein etwaiger Nutzen der neuen Kenntnisse wird hier meist mit dem Studienfach Mathematik verbunden:

> „Wenn man das später mal studieren möchte"

> „Wenn ich Mathematiker werden sollte"

> „Bestimmte Berufe"

> Niklas: „Ich brauche diese Methoden nicht, unser Verfahren ist doch eh am einfachsten. Ich will doch auch kein Mathe studieren, nur da könnte das nützlich sein"

4) Selbstdarstellung. Die in dieser Kategorie enthaltenen Äußerungen deuten darauf hin, dass ein möglicher Nutzen von Bildung allgemein und des hier gelernten Spezialwissens im Besonderen darin gesehen wird, dass man damit die Wirkung der eigenen Person auf andere Personen beeinflussen kann:

> „man kann angeben, dass man was gelernt hat"

> „ich wirke schlauer!"

5) Allgemeinbildung. Dieser Begriff wird meist nur als Schlagwort eingesetzt, d.h. es steht nur das Wort als Antwort da, keine weitere Ausführung dazu. Dies könnte darauf hindeuten, dass das Konzept der Allgemeinbildung Schülerinnen und Schülern in diesem Alter eigentlich noch nicht allzu viel sagt, sie sich aber daran gewöhnt haben, dort Lerninhalte einzuordnen, denen aus ihrer Sicht kein konkreterer Nutzen zukommt.

6) Historisches Wissen. Diese Kategorie ist für unser Anliegen von besonderem Interesse und erstreckt sich über ein großes Spektrum von Antworten. Zunächst einmal wird das erworbene historische Wissen als Nutzen gesehen:

> „Damit man auch mal weiß, wie es früher war zu rechnen"

> „Um zu wissen, wie man in der Zukunft [sic!] gerechnet hat"

In einem nächsten Schritt wird der eigentliche Nutzen des historischen Wissens dann aber auch im Vergleich mit der Situation der Gegenwart gesehen:

> „Es könnte sein, dass wir damit wissen, wie „unser" Malnehmen entstanden ist"

> „Man lernt neue Sachen und sieht, wie sich die Dinge im Laufe der Zeit verändert haben"

Bei der zuletzt wiedergegebenen Äußerung kann man bereits von einer Erkenntnis der Historizität der Mathematik sprechen.

Beim Vergleich von Vergangenheit und Gegenwart wird die heutige Situation häufig, aber nicht ausschließlich, als Fortschritt erlebt. Hierin kommt erneut die subjektive Bewertung des vertrauteren Normalverfahrens als einfacher zum Ausdruck:

> „Also dass die Menschen auch schwieriger als wir gerechnet haben“

> „Das wir das Glück haben so eine leichte Rechenmethode zu beherrschen“

> „Wie anstrengend es früher war zu rechnen oder wie die es sich früher leicht gemacht haben zu multiplizieren“

Gleichzeitig wird dem Vergleich von Vergangenheit und Gegenwart zugetraut, für das Verständnis des Normalverfahrens nützlich zu sein:

> „man kann sich erklären, wieso unser System so funktioniert“

Umgekehrt gibt es aber auch die Auffassung, dass historisches Wissen zu nichts nützt:

> „Für gar nichts, weil das Vergangenheit ist“

7) Interkultureller Nutzen. Wie oben schon angedeutet, unterscheiden die Probanden noch nicht deutlich zwischen anderen Zeitepochen einerseits und anderen (eventuell nicht historisch, sondern gegenwärtig bestehenden) Kulturen andererseits. Insofern wird ein möglicher Nutzen der neuen Kenntnisse im Bereich des Kontakts mit anderen Ländern, Kulturen und Sprachräumen gesehen:

> Laura: „Jetzt weiß man mehr über früher und andere Völker“

> „Es wäre gut, wenn man verreisen würde“

> „vielleicht würde man mehr verstehen … in anderen Ländern“

> „Für mich hat es den gleichen Sinn wie Französisch lernen, nicht das ich mich so unterhalten kann sondern das ich mehr über etwas verstehe und auch leichter andere Sprachen lernen kann“

8) Interesse als Nutzen. In einigen Äußerungen wird als Nutzen der Lerneinheit schlicht genannt, dass das Gelernte interessant oder spannend ist oder einfach Spaß macht:

> Laura: „Mir hat´s Spaß gemacht unterschiedlich zu rechnen und das zu lernen.“

9) und 10): Schließlich gibt es noch Antworten, die in die Kategorien „es hat keinerlei Nutzen“ oder „Weiß nicht“ fallen. Wie die folgende Äußerung zeigt, sehen manche der Probanden, die sich so äußern, das gesamte Projekt eher kritisch:

> Jonas: „Ich fand´s total unnötig, ich kann doch normal multiplizieren. Außerdem haben die Rechnungen ja eh nichts gemeinsam, also voll lame.“

Die Nennungshäufigkeiten der einzelnen Kategorien werden in Tabelle 2 zusammengestellt; hierbei ergeben sich in Summe nicht genau die Probandenzahlen, weil manche Probanden mehrere Antworten gegeben haben und auch manche Antworten mehreren Kategorien zuzuordnen sind.

Kategorie	D1	D2	D3	D4	Summe
1	4	4	2	3	13
2a	3	6	1	2	12
2b	3	-	-	1	4
3	5	-	-	-	5
4	-	2	1	3	6
5	4	-	1	2	7
6	2	-	2	1	5
7	4	3	1	-	8
8	1	3	1	-	5
9	2	2	-	1	5
10	3	-	-	-	3
k. A.	3	1	-	-	4

Tab. 2: Nennungshäufigkeiten

6. Fazit und Ausblick

Abschließend kann in Bezug auf beide eingangs betrachteten Arten von Reflexion gesagt werden, dass der Einsatz historischer Elemente in der vorliegenden Fallstudie durchaus dazu geführt hat, Reflexion anzustoßen, allerdings meist nur bei einzelnen Schülerinnen und Schülern bzw. Teams. Teile dieser Reflexionsprozesse konnten aber im Rahmen abschließender Unterrichtsgespräche in die gesamte Lerngruppe weitergetragen werden, im Fall des Gruppeninterviewformats sogar automatisch.

Jedenfalls zeigen unsere Erfahrungen, dass die Auseinandersetzung mit und der Vergleich von verschiedenen Rechenverfahren einer deutlicheren unterrichtlichen Unterstützung bedarf. Hier wären als Unterstützungsmaßnahmen z. B. Visualisierungen zu implementieren und evaluieren. Insbesondere hatten wir als auffallend die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler mit dem Formulieren von Begründungen notiert. Als Unterstützungsmaßnahmen wären hier stichwortartig zu nennen Förderung der notwendigen Fachsprache, Einsatz von Forschermitteln, Intensivierung der Diskursebene, Darstellungsvernetzung...

Unsere Erfahrungen legen auch nahe, dass kleinere Fragestellungen viel deutlicher zu Reflexion hätten anregen können. Wo wir etwa gefragt haben „Funktioniert das ägyptische Verfahren immer? Begründet eure Antwort“ (vgl. Kapitel 4.2), hätte man fragen können „Welche Zeilen werden gestrichen? Warum sind es genau diese Zeilen? Tim vermutet, mit dem Zahlen in der linken Spalte kann ich jede Summe von 1 bis 31 bilden. Was meint Tim damit?“. Bei einer wiederholten Durchführung könnten solche kleineren Fragestellungen die Reflexion vertiefen.

Unsere bisherigen Daten erlauben es nicht, zu allen Teilfragen, die sich aus unserer Zielsetzung ergeben, belastbare Aussagen zu machen. Insbesondere trifft dies auf die Frage zu, ob sich durch den Einsatz von Impulsen und Aufgaben wie den hier verwendeten das Bild verändert, das die Schülerinnen und Schüler von der heutigen Mathematik haben. Dazu können wir schon deshalb keine Aussage machen, weil wir das Bild, das die Probanden vor der Studie von der Mathematik hatten, nicht erhoben haben (und es ist auch fraglich, ob die dafür gängigen Items für die Altersgruppe geeignet sind). Wir haben das Ziel vor allem formuliert, weil es unseres Erachtens im Kontext jeden Einsatzes von Geschichte im Mathematikunterricht sehr wichtig ist, und hoffen, dass es in zukünftigen Studien weiterverfolgt werden kann.

Wir haben den Eindruck, dass der Nutzen des Einsatzes von Geschichte „as a tool“ (wo auch andere „tools“ denkbar wären) vor allem motivational ist: neue Methoden werden überwiegend gerne erlernt, wenn sie in historischem Gewand daherkommen. Eine große Rolle spielt hier der Rätselcharakter: eigenes Entziffern sowie eigenes Entschlüsseln von unbekannten Vorgehensweisen.

Eine zusätzliche Beobachtung wurde wiederholt gemacht: es kommen immer wieder auch unvorhergesehene Beiträge zustande, die aufgegriffen werden wollen (denn auch das erhöht natürlich die Motivation) und eine allzu minutiöse Planung eines solchen Projekts illusorisch erscheinen lassen. Wichtig ist ferner das Vorhalten von Möglichkeiten der Binnendifferenzierung, z. B. wegen unterschiedlicher Bearbeitungszeiten der Arbeitsaufträge. Auch scheint ein solches Projekt realistischer, wenn zwei Lehrpersonen für die Unterstützung der Teams in den Gruppenarbeitsphasen zur Verfügung stehen.

Es ist uns bewusst, dass man den jeweiligen historischen Kontext viel stärker einbinden könnte und im Blick auf unser Ziel (2) auch sollte, als es im Rahmen relativ kurzer Unterrichtssequenzen, in denen vor allem die Verfahren selbst erarbeitet werden sollten, möglich war. Hier müsste man sich eventuell auf weniger Verfahren konzentrieren, diese aber stärker historisch einbetten, z. B. das ägyptische Verfahren anhand von Auszügen aus dem Papyrus Rhind.

Damit sind wir bei der Frage nach einer stärker hermeneutischen Ausrichtung; hierzu müsste man sich entweder auf deutschsprachige Quellen beschränken oder die Authentizität der Quellen zumindest insofern aufgeben, als man mit Übersetzungen arbeitet. Im ersten Fall kommen z. B. weitere Ausschnitte aus Apians Werk in Betracht. Im Rahmen eines Projektseminars an der Bergischen Universität Wuppertal wurde beispielsweise der dort zu findende Abschnitt zur Galeerenmultiplikation in einer sechsten Klasse mit einigem Erfolg bearbeitet. Da es sich hierbei allerdings um eine Methode handelt, die im Vergleich zu den im vorliegenden Aufsatz besprochenen Methoden relativ schwer zu erlernen ist, musste die Arbeit an der Quelle mit geeigneten Anleitungselementen flankiert werden. Dieser Versuch harrt noch der Fortsetzung.

Danksagung

Wir danken den gutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare. Unser Dank geht ferner an die HerausgeberInnen, die TeilnehmerInnen des Oberseminars Didaktik der Mathematik der BUW, den Fachlehrer Heiner Schwarz, die Studierenden der BUW, die sich im Rahmen einer Masterthesis sowie eines Projektseminars mit der Thematik auseinandergesetzt haben, und nicht zuletzt an alle teilnehmenden Schülerinnen und Schüler.

Literatur

Bose, S. (2013). *Vedic maths: secret skills for quick, accurate mental calculations*. New Delhi: V & S Publishers

Furinghetti, F. & Jahnke, H. N. & van Maanen, J. (Hrsg.) (2006). Mini-Workshop: Studying Original Sources in Mathematics Education. *Oberwolfach Reports 3*(2), 1285–1318. doi: 10.4171/OWR/2006/22

Höhkter, B. & Selter, C. (1998): Von der halbschriftlichen zur schriftlichen Multiplikation? *Die Grundschulzeitschrift 119*, 17–19.

Hußmann, S. et al. (2007). *Lambacher Schweizer 5 Mathematik für Gymnasien* (2.Auflage). Stuttgart: Klett.

Jahnke, H. N. (1995). Historische Reflexion im Unterricht. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung (Bernoulli 1692) in einer elften Klasse. *mathematica didactica 18*(2), 30–58.

Jankvist, U. Th. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 71*, 235–261.

Lengnink, K. & Krömer, R (2018). Materialisierung, System, Spiegel des Menschen. Historische und didaktische Bemerkungen zur Sozialanthropologie der Mathematik nach Roland Fischer. *Mathematik und Gesellschaft. Historische, philosophische und didaktische Perspektiven.* G. Nickel, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink, M. Rathgeb (Hrsg.). Wiesbaden: Springer Spektrum. 135–156.

Menninger, K. (1957). *Zahlwort und Ziffer.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Padberg, F. (1992). *Didaktik der Arithmetik* (2. Auflage). Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Peschek, W. & Prediger, S. & Schneider, E. (2008). Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule 50*, 1–6.

Schonard, A. & Kokot, C. (2013). *Der Matheknüller. Schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt. Genial einfach – einfach genial.* Selbstverlag.

Shukla, K. S. (1991). Vedic Mathematics – the Deceptive Title of Swamiji’s Book. *Issues in Vedic Mathematics, Proceedings of the National Workshop on Vedic Mathematics, 25-28 March 1988, at the University of Rajasthan, Jaipur,* ed. H.C. Khare, Delhi: Motilal Banarsidass, 31–39.

Schipper, W. & Ebeling, A. & Dröge, R. (2018). *Handbuch für den Mathematikunterricht, 4. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel

Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy. Citizenship, Mathematical Archaelogy, Mathemacy and Deliberative Interaction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 98*(6), 195–203.

Tirtha, S. B. K. & Agrawala, V. S. (1989). *Vedic Mathematics.* Delhi: Motilal Banarsidass Publ.

Tropfke, J. (1980). *Geschichte der Elementarmathematik. 4. Auflage, Band 1: Arithmetik und Algebra*. Völlig neu bearbeitet von K. Vogel, K. Reich und H. Gericke. Berlin, New York: de Gruyter.

Vogel, K. (1958). *Vorgriechische Mathematik I*. Schroedel.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Anschrift der Verfasser

Ralf Krömer
Bergische Universität Wuppertal
Didaktik und Geschichte der Mathematik
Gaußstr. 120
42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Sarah Beumann
Bergische Universität Wuppertal
Didaktik und Geschichte der Mathematik
Gaußstr. 120
42119 Wuppertal
beumann@uni-wuppertal.de