Grundvorstellungen Funktionalen Denkens handlungsorientiert ausschärfen – Eine Interviewstudie zum Umgang von Schülerinnen und Schülern mit haptischen Modellen von Funktionsgraphen

FREDERIK DILLING, SIEGEN; FELICITAS PIELSTICKER, SIEGEN & INGO WITZKE, SIEGEN

Zusammenfassung*: Die Entwicklung Funktionalen Denkens (Vollrath, 1989) ist ein entscheidendes Element der Analysispropädeutik in der Sekundarstufe I. Der Beitrag soll aufzeigen, wie sich durch den Einsatz haptischer Modelle von Funktionsgraphen im Mathematikunterricht grundlegende Vorstellungen zur Kovariation und zur Funktion als Ganzes entwickeln lassen. In einer empirischen Untersuchung wurde dazu die Begriffsentwicklung von sechs Schülerinnen und Schülern einer zehnten Klasse in einer kontrollierten Umgebung untersucht. Die Videoaufnahmen der Arbeitsphasen und von anschließenden Experteninterviews wurden mit der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) kategorisiert. Als theoretischer Hintergrund dienen die Theorie der Grundvorstellungen nach vom Hofe (1992) und die Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld (1983) eingebettet in das Konzept der empirischen Theorien nach Burscheid und Struve (2010).*

Abstract: *The development of functional thinking (Vollrath, 1989) is a decisive element of precalculus courses. This article is intended to show how basic concepts about covariation and the function as a whole can be developed by using tactile models of graphs of functions in mathematics class. In an empirical study, the conceptual development of six students of a tenth grade was investigated in a controlled environment. The video recordings of the working phases and of subsequent expert interviews were categorized using the method of qualitative content analysis according to Mayring (2010). The theoretical background is the theory of basic concepts according to vom Hofe (1992) and the theory of subjective domains of experience according to Bauersfeld (1983) embedded in the concept of empirical theories according to Burscheid and Struve (2010).*

1. Einleitung

Die Förderung Funktionalen Denkens nach Vollrath (1989) ist eines der wesentlichen Ziele des Mathematikunterrichts der Sekundarstufen. Im Rahmen der Analysispropädeutik sind besonders der Kovariations- und der Objektaspekt von Bedeutung. Gerade mit Blick auf diese beiden Aspekte ergeben sich im Mathematikunterricht besondere Herausforderungen.

Der folgende Beitrag soll die Möglichkeiten des Einsatzes haptischer Modelle zur Förderung zentraler Vorstellungen der Kovariation und der Funktion als Ganzes am Beispiel von mit 3D-Druck-Technologie hergestellten Modellen reeller Funktionsgraphen aufzeigen. In einer empirischen Studie werden dazu die Vorstellungen von sechs Schülerinnen und Schülern (im Folgenden in der einheitlichen Form Schüler) zu den Materialien (3D-Druck-Technologie und Modelle) in einer kontrollierten Umgebung theoriegeleitet untersucht und beschrieben. Die erhobenen Daten (Videoaufnahmen der Erprobung und der Interviews, schriftliche Antworten der Schüler) wurden transkribiert und mit der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) analysiert. Als theoretischer Hintergrund dient das Konzept der empirischen Theorien (Burscheid & Struve, 2010), da es sich besonders zur Untersuchung empirisch-orientierter Wissensentwicklungsprozesse eignet. Zur Beschreibung des Verhältnisses der entwickelten Schülertheorie und den intendierten mathematischen Begriffen wird die Theorie der Grundvorstellungen (Vom Hofe, 1992) als normative Perspektive und die Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche (Bauersfeld, 1983) als deskriptive Perspektive einbezogen.

2. Funktionales Denken: Grundvorstellungen, Subjektive Erfahrungsbereiche und Empirische Theorien

2.1 Grundvorstellungen zu Funktionen als normative Perspektive

Die Grundlage dieses Themenheftes ist die Förderung des Funktionalen Denkens im Mathematikunterricht. Mit der Theorie des Funktionalen Denkens lassen sich Grundvorstellungen zu Funktionen beschreiben. Grundvorstellungen werden häufig normativ verwendet, indem ausgehend vom mathematischen Inhalt relevante Aspekte und Vorstellungen entwickelt werden, die Schüler im Unterricht kennenlernen sollen (vgl. Klinger, 2018).

> „Er [Der Terminus Grundvorstellung] charakterisiert fundamentale mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen. Er beschreibt somit Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen oder kurz:

> Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität." (Vom Hofe, 1992, S. 347)

In diesem Kontext lassen sich nach Vollrath (1989) drei Grundvorstellungen zu Funktionen unterscheiden:

- Zuordnungsaspekt: „Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so daß die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen." (Vollrath, 1989, S. 8)
- Kovariationsaspekt: „Durch Funktionen erfaßt man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken." (Vollrath, 1989, S. 12)
- Objektaspekt: „Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes." (Vollrath, 1989, S. 15)

Nach Bruner (1974) können mathematische Inhalte auf den drei Darstellungsebenen enaktiv (Handlungen), ikonisch (bildliche Darstellungen) und symbolisch (Sprache) gelernt werden. Die verschiedenen Darstellungsebenen sorgen im Themenbereich Funktionen nach Vollrath (1989) für die Betonung unterschiedlicher Grundvorstellungen. Beispielsweise eigne sich der Graph einer Funktion (ikonische Darstellung) besonders zur Entwicklung des Objektaspektes, da globale Eigenschaften wie das Steigungsverhalten oder Symmetrien direkt ersichtlich sind.

2.2 Subjektive Erfahrungsbereiche als deskriptive Perspektive auf Funktionales Denken

Zur Beschreibung der von den Schülern bei der Verwendung der 3D-Druck-Technologie entwickelten Vorstellungen zu Funktionen verwenden wir die Theorie der „Subjektiven Erfahrungsbereiche" (im Weiteren kurz: SEB) nach Bauersfeld (1983). Demnach können menschliche Erfahrungen in „bestimmten Sachzusammenhängen" (S. 1) gewonnen und entsprechend ihrer „situativen Bindung" (S. 2) als voneinander getrennt beschrieben werden. Die Speicherung individueller Erfahrungen erfolgt in voneinander getrennten SEB. Ein SEB umfasst sowohl die kognitive Dimension einer Erfahrung, als auch Motorik, Emotionen und Wertungen.

Die „society of mind" bildet die Gesamtheit der SEB eines Individuums. Innerhalb dieses Systems sind die SEB „nicht-hierarchisch" (S.2) angeordnet, kumulativ und konkurrieren um Aktivierung. Die Wiederholung einer ähnlichen Situation führt zu einer Festigung und damit auch zu einer effektiveren Aktivierung eines SEB. Bei nicht Aktivierung verblassen diese SEB.

Eine wichtige Bedeutung bei der Verknüpfung bereits vorhandener SEB hat die Sprache. Da ein Begriff besonders im Zusammenhang mit anderen Begriffen Sinn erhält, hat jeder SEB seinen spezifischen Sprachgebrauch (vgl. Tiedemann, 2016). Eine Verallgemeinerung von Begriffen geschieht durch den aktiven Versuch, die Gleichheit in zwei verschiedenen SEB, bspw. durch Analogiebildung, zu erkennen und auf diese Weise einen neuen SEB auszubilden, der eine Vernetzung der ursprünglichen SEB ermöglicht (vgl. Bauersfeld, 1983). Für die Entwicklung mathematischer Begriffe bedeutet dies, einen Zusammenhang zwischen der mathematischen Struktur und der Struktur eines oder mehrerer SEB zu schaffen. Dieser Vergleich kann nur aus der Perspektive des neuen SEB geschehen, dessen Bildung einer aktiven Sinnkonstruktion des Lernenden bedarf, in der dieser den mathematischen Zusammenhängen einen bestimmten Sinn zuschreibt. Andernfalls entsteht eine Alternativkonstruktion innerhalb eines schon vorhandenen SEB, welche Fehlstrategien zur Folge haben kann. Eine wichtige Rolle spielt in dieser Phase auch das Aushandeln von Begriffen in der Interaktion mit anderen Personen (vgl. Bauersfeld, 2000).

2.3 Der Zusammenhang von Grundvorstellungen und Subjektiven Erfahrungsbereichen

Die Konzepte der Grundvorstellungen nach vom Hofe (1992) und der Subjektiven Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld (1983) lassen sich in einem gemeinsamen Konzept zum Lehren und Lernen von Mathematik zusammenführen. Die Grundvorstellungen bieten die Möglichkeit, wichtige Aspekte eines zu lernenden mathematischen Inhalts ausgehend von diesem zu entwickeln und für den Unterricht zu präzisieren. Damit werden Grundvorstellungen als normative Perspektive verwendet – sozusagen als handlungsleitende Kategorien des Lehrers. Im vorliegenden Fall handelt es sich um die Grundvorstellungen zu Funktionen nach Vollrath (1989). Die Subjektiven Erfahrungsbereiche stellen dahingegen ein Konzept bereit, um die Entwicklung von Vorstellungen der Schüler zu rekonstruieren und zu beschreiben. Sie stellen somit eine deskriptive Perspektive dar. Diese kann dann mit der normativen Perspektive in Zusammenhang gebracht werden.

Diesen Zusammenhang stellt auch vom Hofe (1995) im erweiterten Grundvorstellungskonzept dar (Abb. 1). Demnach möchte die Lehrperson ausgehend vom mathematischen Inhalt bestimmte Grundvorstellungen – als Kategorien – bei den Schülern entwickeln und im Sachzusammenhang umsetzen. Der Unterricht wird auf diese Weise geplant und gestaltet, und auf Schülerseite werden individuelle Subjektive Erfahrungsbereiche aufgebaut. Dadurch kann der Schüler gegebenenfalls den Sachzusammenhang erfassen und entsprechende Grundvorstellungen aufbauen. Diese können wiederum helfen, die Mathematik zu verstehen.

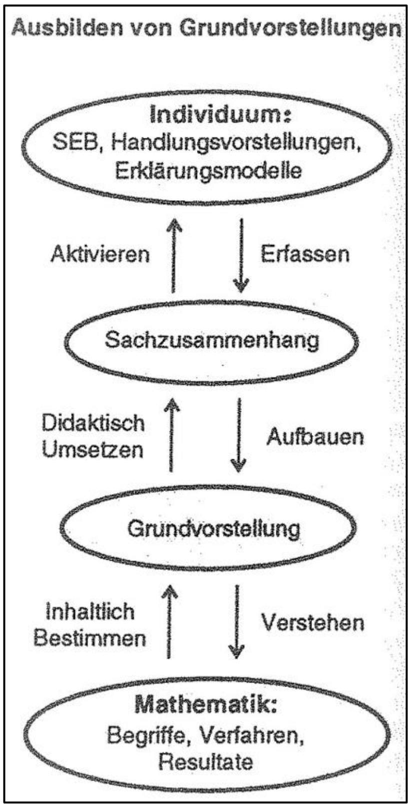

Abb. 1: Erweitertes Grundvorstellungskonzept nach vom Hofe (1995, S. 48)

2.4 Empirische Theorien im Zusammenhang mit Funktionen

Das Konzept der empirischen Theorien nach Burscheid und Struve (2010) ist in besonderer Weise zur Beschreibung des Wissens (in Erfahrungswissenschaftlichem Kontext) von Schülern geeignet und soll an dieser Stelle herangezogen werden. Demnach ist das mathematische Wissen von Kindern empirisch-gegenständlicher Art. Es bezieht sich auf spezifische Bereiche ihrer Erfahrung und ist damit kontextgebunden. Diese Subjektiven Erfahrungsbereiche werden durch den Umgang mit realen Phänomenen entwickelt, sodass eine ontologische Bindung des mathematischen Wissens mit Bezug auf gewisse Referenzobjekte entsteht. Hierin unterscheiden sich die Auffassungen von Mathematik an Schulen fundamental von denen an Universitäten. Anstelle konkreter Referenzobjekte werden dort Definitionen und Axiome gesetzt, aus denen Aussagen deduktiv geschlossen werden.

Die Struktur der Subjektiven Erfahrungsbereiche von Schülern beeinflusst wesentlich die Begriffsentwicklung und Argumentation im Unterricht. Daher bedarf eine adäquate Rekonstruktion der Wissensstruktur von Schülern einer Beschreibung der Subjektiven Erfahrungsbereiche sowie der entsprechenden Referenzobjekte und -beziehungen. Gemäß des Theory-theory-Ansatzes (vgl. Gopnik & Meltzoff, 1997) gehen Kinder bei der Entwicklung von Wissen über gewisse Phänomene der Realität in ähnlicher Weise vor wie Wissenschaftler der experimentellen Naturwissenschaften. Das Wissen der Lernenden kann dann mit Hilfe empirischer Theorien über diese Phänomene beschrieben werden.

3. Empirisches Arbeiten in der Analysis mit haptischen Modellen

Die Funktionenlehre der Sekundarstufe I und die Analysis der Sekundarstufe II ist durch einen hohen Anteil an kalkülhaften Arbeitsphasen geprägt. Der allgemeinbildende Mathematikunterricht sollte aber auch zu einem vertieften Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe führen (vgl. Winter, 1983). Aus diesem Grund wird in vielen stoffdidaktischen Veröffentlichungen zur Analysis die Wichtigkeit von qualitativem Arbeiten mit Funktionen betont (z. B. Blum & Kirsch, 1979; Danckwerts & Vogel, 2006; Greefrath, et al., 2016; Hahn, 2005; Tall, 2013).

Witzke (2014) konnte in einer Schulbuchanalyse zur empirisch-gegenständlichen Analysis eine Dominanz von Funktionsgraphen in den untersuchten Lehrwerken feststellen. Sie sind zentrale Objekte des Argumentierens und Handelns der Schüler (vgl. Witzke & Spies, 2016). Existenzfragen werden dann auf der Grundlage der Graphen beantwortet. Dem formal-algebraischen Kalkül kommt dabei die Aufgabe der Exaktifizierung zu. Als Konsequenz ergibt es sich, dass Graphen als eigenständige Objekte des Analysisunterrichts betrachtet werden können.

Obwohl graphische Darstellungen ein zentrales Element des Analysisunterrichts sind, werden gegenständliche Materialien nur selten eingesetzt (vgl. Dexheimer, 2014). Eine Ausnahme bilden Parabelschablonen, die zu Beginn der Funktionenlehre als Zeichenwerkzeug eingesetzt werden können. Die 3D-Druck-Technologie ermöglicht die Realisierung einer Vielzahl weiterer mathematischer Anschauungsmittel für enaktive Arbeitsphasen (siehe hierzu Dilling, 2019 sowie Witzke & Dilling, 2018). Im Folgenden sollen Kurvenlineale, darunter Parabelschablonen, sowie ein Computerprogramm zur Entwicklung dreidimensionaler Modelle von Funktionsgraphen mit 3D-Druck-Technologie genauer vorgestellt werden. Anschließend werden mögliche Nutzungsformen der Modelle aufgezeigt.

3.1 Das Programm Graphendrucker

In den letzten Jahren haben digitale Medien im Bildungsbereich und insbesondere im Mathematikunterricht zunehmend an Bedeutung gewonnen. Die 3D-Druck-Technologie ist ein relativ neues digitales Werkzeug mit aus unserer Sicht großem Potenzial für den Mathematikunterricht. Es handelt sich um ein additives Herstellungsverfahren, d. h. ein mit CAD-Software erstelltes digitales Modell wird schichtweise aus flüssigem Kunststoff in ein gegenständliches Modell umgewandelt (vgl. Fastermann, 2016). In der Mathematikdidaktik wurden kürzlich mehrere Artikel zu diesem Thema veröffentlicht (z. B. Labs, 2015; Lindmeier & Rach, 2015; Ng & Sinclair, 2018; Panorkou & Pratt, 2016, Witzke & Hoffart, 2018).

Das Programm „Graphendrucker“ ist ein auf dem skriptbasierten CAD-Programm OpenSCAD basierendes Computerprogramm, mit dem sich auf einfache Weise dreidimensionale Repräsentationen von reellen Funktionsgraphen konstruieren lassen (vgl. Dilling, 2019). Ein Screenshot der Benutzeroberfläche ist in Abb. 2 zu sehen. Indem Benutzer eine beliebige Funktionsvorschrift sowie eine untere und obere Intervallgrenze im Eingabefeld eintragen wird das Objekt festgelegt. Das Programm reiht anschließend automatisch Zylinder mit einem Durchmesser von 1mm und einer Höhe von 1cm entlang des Graphen aneinander. Durch die Vereinigung dieser Zylinder entsteht ein 1mm dicker und 1cm aus der Ebene gehobener Funktionsgraph. Darstellbar sind alle Funktionen, die sich aus elementaren Funktionen durch die Grundrechenarten verknüpfen lassen. Die Eingabe einer zweiten Funktion ermöglicht die parallele Darstellung zweier verschiedener Funktionen. Verschiedene weitere Einstellungen können vorgenommen werden, darunter eine Verstärkung in Form einer Verdickung im unteren Bereich des Modells, ein L-förmiger Körper, der im Nullpunkt platziert ist und den Ursprung sowie die Achsen und die Einheit markiert, sowie eine Platte mit Koordinatensystem unter den Graphen. Die einzelnen Optionen lassen sich im Eingabefeld frei ein- oder ausschalten und passen sich dynamisch an die Intervalle sowie Minima und Maxima der eingegebenen Funktionen an. Das virtuelle Modell lässt sich im Anschluss an die Konstruktion mit einem beliebigen 3D-Drucker in ein Realmodell überführen. 3D-gedruckte Graphenmodelle einer Parabel und einer Geraden sind in Abb. 3 zu sehen.

Abb. 3: 3D-Modelle einer Parabel und einer Geraden

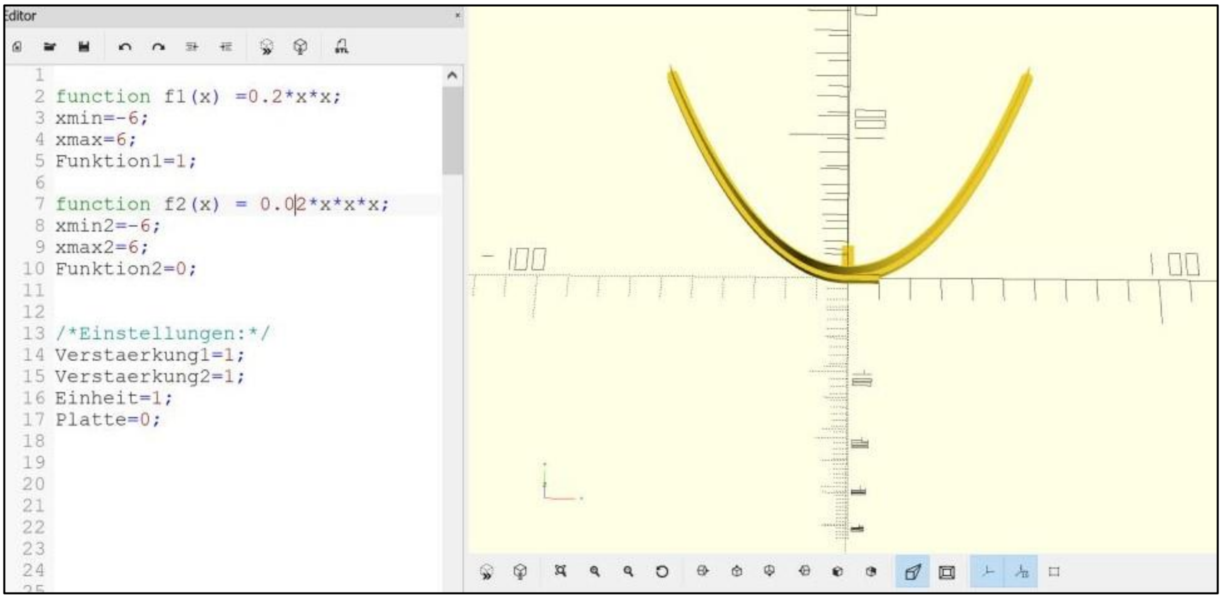

Abb. 2: Screenshot der Benutzeroberfläche des Programms „Graphendrucker“

3.2 Kurvenlineale und Parabelschablonen

Kurvenlineale sind Lineale zum präzisen Zeichnen von gebogenen Linien. Sie werden insbesondere verwendet, um zwei Kurvenabschnitte durch eine stetige Kurve zu verbinden. Man unterscheidet feste und biegsame Kurvenlineale. Feste Kurvenlineale geben spezifische Kurvenverläufe vor. Für technische Zeichnungen sind so genannte Burmester-Schablonen gebräuchlich (siehe Abb. 4). Diese stellen Splines dritter Ordnung dar und werden meist im Set aus mindestens drei Schablonen verwendet. Zur Verbindung von Kurvenverläufen werden dann Abschnitte verschiedener Schablonen verwendet und überlappend zu einer stetigen Kurve gezeichnet. Außerdem können mit Ihnen Polynomkurven, Winkelfunktionen, Ellipsen und vieles mehr angenähert werden. Neben den sehr umfassenden Burmester-Schablonen gibt es auch spezielle Lineale für Kegelschnitte oder Winkelfunktionen. Zum Zeichnen im Mathematikunterricht sind insbesondere Parabelschablonen (Abb. 5) in Gebrauch. Mit einer solchen Schablone können Parabeln gezeichnet werden, die kongruent zur Normalparabel sind. Hierzu wird die Schablone am Scheitelpunkt der Parabel angesetzt. Wird die Schablone um einen rechten Winkel gedreht, kann auch der Graph der Wurzelfunktion gezeichnet werden. In Parabelschablonen sind häufig auch Schablonen zum Zeichnen der Winkelfunktionen integriert.

Das wohl am häufigsten verwendete Zeichengerät im Mathematikunterricht stellt das Lineal dar (Abb. 6). Dieses wird bereits im Geometrieunterricht der Grundschule genutzt und befindet sich standardmäßig in jedem Schülermäppchen. Auch im Themenbereich Funktionen kann es zum Zeichnen von linearen Funktionsverläufen genutzt werden.

Neben Kurvenschablonen gibt es auch biegsame Kurvenlineale. Diese bestehen aus einem Bleikern, der mit Gummi ummantelt ist. Der Bleikern ist flexibel, erhält aber auf Grund seiner Steifigkeit die Form. Das Gummi gleicht durch das Biegen entstehende Unregelmäßigkeiten aus. Mit biegsamen Kurvenlinealen lässt sich beinahe jeder Kurvenverlauf zeichnen.

Heutzutage werden Kurvenschablonen in technischen Berufen kaum noch verwendet. Kurvenverläufe werden stattdessen mit CAD-Software durch eine Regressionsanalyse bestimmt und graphisch dargestellt. Die Objekte stellen dennoch wichtige Werkzeuge im Mathematikunterricht dar.

Abb. 4: Burmester-Schablonen

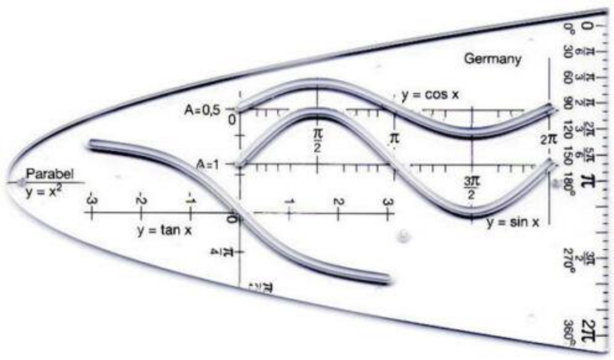

Abb. 5: Parabelschablone mit Integrierter Winkelfunktionsschablone

Abb. 6: Lineal

3.3 Einsatzmöglichkeiten haptischer Modelle

Die Grundlage dieses Themenheftes ist die Förderung Funktionalen Denkens im Mathematikunterricht. Die drei Aspekte Zuordnung, Kovariation und Objekt wurden bereits in Abschnitt 2 detailliert dargestellt. Im nun folgenden Abschnitt sollen die Möglichkeiten der Förderung Funktionalen Denkens mit Hilfe haptischer Modelle, also der 3D-gedruckten Objekte sowie klassischer Kurvenschablonen, aus theoretischer stoffdidaktischer Perspektive expliziert werden.

Der Zuordnungsaspekt von Funktionen steht insbesondere durch die Präsenz in der Definition einer Funktion häufig im Zentrum der Vorstellungen der Schüler. Anders ist dies beim Kovariations- und Objektaspekt. Malle (2000) stellt bei vielen Schülern klare Defizite in Bezug auf den Kovariationsaspekt fest. Auch der Objektaspekt rückt im Unterricht häufig in den Hintergrund. Dies ist auch deshalb problematisch, da der Kovariationsaspekt in direktem Zusammenhang zur Änderungsrate einer Funktion steht und damit zur Vorbereitung auf die Analysis essenziell ist (vgl. Klinger, 2018). So stellt beispielsweise Hahn (2005) die Bedeutung des Kovariationsaspektes für die Kurvendiskussion heraus.

Die haptischen Modelle bieten die Möglichkeit, den Kovariationsaspekt funktionalen Denkens hervorzuheben und zu fördern. Durch das Entlangfahren mit dem Finger an den 3D-Modellen können die Schüler die Änderung der Funktionswerte unmittelbar wahrnehmen.

Ein Rahmenkonzept für solche enaktiven Arbeitsweisen mit Funktionsgraphen ist der „embodied approach“ nach Tall (2013, S. 300 f.). Dieser beginnt mit mentalen Handlungen an einem gezeichneten bzw. mentalen Graphen „which we can trace with our finger and see as an object“. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 7 (oben) dargestellt und ermöglicht das Fühlen der Stetigkeit des Graphen als „dynamic continuity“. Die Vorstellung, mit der ausgestreckten Hand entlang der Kurve zu gleiten „to let the slope of the hand follow the changing slope“, wie es in Abb. 7 (unten) zu sehen ist, verkörpert die sich verändernde Steigung. Diese könne mit der Handlung nicht präzise gemessen werden, entscheidend sei die gedankliche Vorstellung einer sich verändernden Steigung.

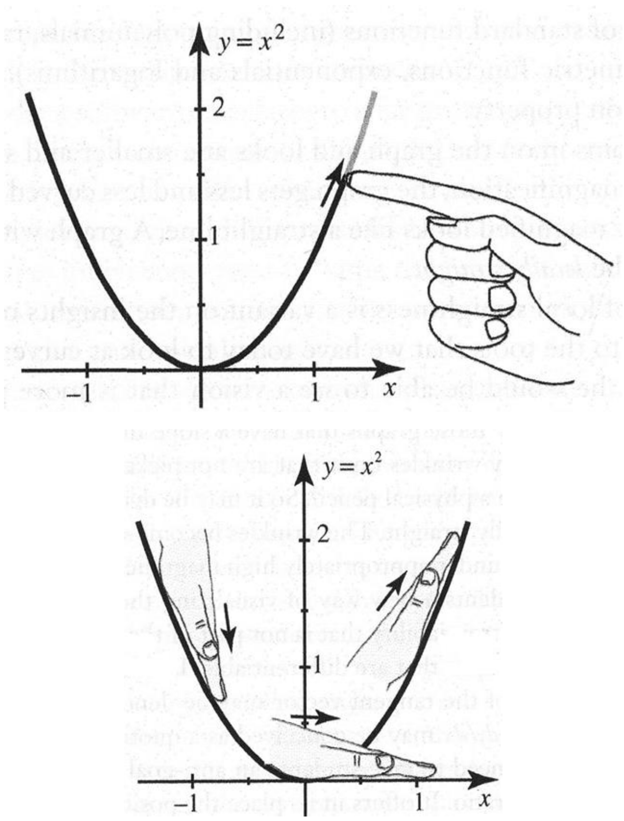

Abb. 7: Stetigkeit (oben) und Steigung (unten) des Graphen mit der Hand fühlen (Tall, 2013, S. 300)

Die beschriebene Herangehensweise kann durch die Modelle unterstützt werden. Die Handlungen vollziehen sich nicht mehr auf der reinen Vorstellungsebene, sondern können wirklich ausgeführt werden. Der Graph kann in die Hand genommen und auf diese Weise sensorisch erfahrbar werden. Damit können bereits in der Sekundarstufe I erste Erfahrungen mit den Begriffen Stetigkeit, Steigung und lokale Linearität gemacht und der Kovariationsaspekt von Funktionen hervorgehoben werden.

Auch der Objektaspekt kann durch den Einsatz der Modelle gefördert werden. Besonders graphische Darstellungen eröffnen, so Vollrath (1989), den „Blick für das Ganze“. Eigenschaften wie das Wachsen, das Fallen oder Symmetrien der Funktion „fallen […] ins Auge“ (S. 16). Mit den Modellen können lokale aber auch globale Eigenschaften handlungsorientiert erarbeitet werden. Die Grundlage hierfür kann das Konzept der „vorstellungsorientierte Kurvendiskussion“ nach Hahn (2005) sein. Durch die Beschäftigung mit qualitativ gegebenen Funktionen (Graph oder Verbalisierung) werden die Schüler dazu angeregt, wichtige Merkmale von Kurvenverläufen begrifflich zu erfassen. Entscheidend ist die Kommunikation, die „das Freilegen von Vorstellungen der Lernenden“ (S. 28) fördere, die im Anschluss aufgegriffen werden können. Die Sprache ist dabei der Vermittler zwischen unterschiedlichen Darstellungsebenen und der Anlass für Lernprozesse (vgl. Hoffkamp, 2009). Durch die zunächst qualitative Beschreibung der Eigenschaften unterschiedlicher Funktionen auf der „intuitiven und inhaltlichen Ebene“ kann nach Weigand und Weth (2002) der „semantische […] Hintergrund zu den späteren formalen Untersuchungen auf der syntaktischen Ebene“ (S. 90) aufgebaut werden.

Die Modelle können im Sinne der obigen Ausführungen die Grundlage für eine qualitative Auseinandersetzung mit den Eigenschaften von Funktionen bilden. Durch die Verbalisierung von Handlungen an den Modellen können erste Vorstellungen aufgebaut werden, die sich in der Kommunikation mit anderen Schülern festigen. Eine geleitete Exploration kann bereits in der Sekundarstufe I einen Einblick in grundlegende Konzepte der Kurvendiskussion geben, bevor diese algebraisch beschrieben werden. Diese Herangehensweise kann die Basis für einen verständigen Umgang mit dem Kalkül bilden.

Eine weitere Nutzungsmöglichkeit der Modelle besteht im Stempeln bzw. im Entlangzeichnen mit einem Stift auf ein gegebenes Koordinatensystem (siehe Abb. 8). Damit können die Lernenden, die vorher frei als Kurvenverlauf gegebene Funktion nun verorten. Auf diese Weise kommen sie schnell zu der Frage, welche verschiedenen Möglichkeiten es in den einzelnen Fällen geben kann und welche Funktionsvorschriften hierzu passen. Der Fokus der Überlegungen richtet sich nun auf Eigenschaften ganzer Funktionsklassen anstelle einzelner Funktionen. Auch kann entdeckt werden, dass die Steigung einer Funktion unabhängig von der Verschiebung in der Ebene ist. Die Krümmung ist unabhängig von der Verschiebung und der Drehung der Kurve. Die Herangehensweise weist Parallelen zur Entwicklung der Analysis auf, da auch dort die konstruierte Kurve die Ausgangslage bildet, die dann zur besseren Beschreibung koordinatisiert wird (vgl. Witzke, 2009). Dadurch können der Krümmungs- und der Kurvenbegriff in einem genetischen Ansatz entwickelt und betont werden. Die Begriffe Funktionsgraph und Kurve werden von Schülern meist synonym verwendet, da Kurven häufig nicht mehr Teil des Unterrichtsstoffes sind (vgl. Weth, 1995). Durch das Stempeln oder Entlangzeichnen und sich daran anschließende Fragen können die zwei Begriffe präzisiert und voneinander abgegrenzt werden.

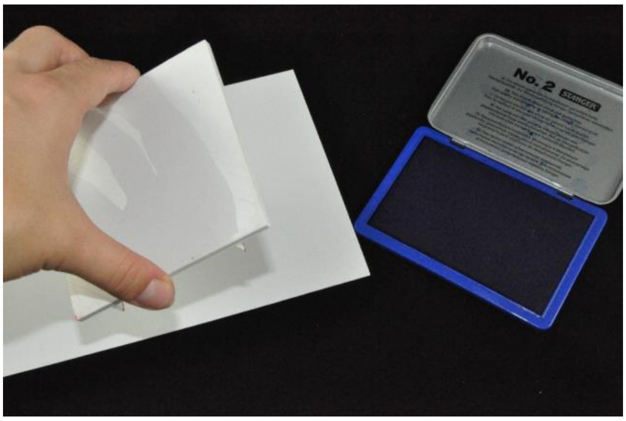

Abb. 8: Stempeln des Funktionsgraphen auf ein Blatt Papier

Bei der Arbeit mit dem Programm „Graphendrucker“ und den 3D-gedruckten Graphenmodellen lernen die Schüler verschiedene Darstellungsformen von Funktionen kennen (vgl. Bruner, 1974). Im Computerprogramm werden zwei Repräsentationsformen von Funktionen gegenübergestellt und verbunden. Im Eingabefeld werden der Funktionsterm und die Intervallgrenzen eingetragen. Durch das Drücken der Vorschautaste entsteht automatisch ein Abbild des druckbaren Modells im virtuellen Raum des CAD-Programms. Damit sind diese zwei Darstellungsformen dynamisch miteinander verknüpft (vgl. Hegedus & Moreno-Armella, 2009). Auf ähnliche Weise könnte auch mit dynamischer Geometriesoftware und Kurvenlinealen gearbeitet werden, wobei dann die Verknüpfung beider Ebenen weniger eindeutig ist.

Die haptischen Modelle sind reale Gegenstände, die sich berühren lassen und damit qualitativ erfahrbar werden. Handlungen an den Modellen verdeutlichen zentrale Begriffe der Funktionenlehre und der Analysis. Mit Hilfe eines Stempels oder Stifts können die Modelle auf Papier gebracht werden. Es entsteht eine (gespiegelte) gezeichnete Version des Graphen. Diese Handlung verbindet die Ebene des realen Graphenmodells – als enaktive Darstellungsebene – mit der ikonischen graphischen Darstellung (vgl. Bruner, 1974) und stellt damit eine Transfermöglichkeit zwischen diesen Darstellungsebenen dar. Die Frage nach den verschiedenen Funktionsvorschriften für die möglichen gestempelten und gezeichneten Darstellungen schließt den Kreis zur symbolischen Darstellungsebene. Damit arbeiten Schüler auf den drei Ebenen enaktiv, ikonisch und symbolisch mit Funktionen.

4. Empirische Studie

4.1 Rahmenbedingungen und Methodik

Das Ziel dieses Beitrages ist die Untersuchung der Möglichkeiten zur Förderung Funktionalen Denkens mit Hilfe haptischer Modelle. Dies soll am Beispiel von im vorherigen Kapitel beschriebenen mit dem Programm „Graphendrucker“ entwickelten und 3D-gedruckten Modellen von Funktionsgraphen geschehen. Im Fokus der Studie steht die folgende Forschungsfrage:

Welche Subjektiven Erfahrungsbereiche im Rahmen empirischen Theorien entwickeln Schüler bei der Arbeit mit dem Programm „Graphendrucker“ und mit 3D-gedruckten Objekten von Funktionsgraphen und in welchem Zusammenhang stehen diese zu den Grundvorstellungen zu Funktionen?

Die Unterstützung von Begriffsbildungsprozessen in der Analysis der Sekundarstufe II mit Hilfe des Programms „Graphendrucker“ wurde bereits in Dilling (2019) empirisch untersucht. Um den Fördermöglichkeiten Funktionalen Denkens in dem vorliegenden Beitrag nachzugehen, wurde die Arbeit von drei zufällig ausgewählten Schülerpaaren einer zehnten Klasse einer Sekundarschule in einer kontrollierten Umgebung untersucht. Der Schwerpunkt der Aufgaben war der Vergleich des Änderungsverhaltens und der lokalen und globalen Eigenschaften quadratischer und linearer Funktionen. Die Schüler haben bereits im Vorfeld lineare und quadratische Funktionen im Unterricht behandelt, sodass Definitionen und Begrifflichkeiten bekannt waren.

Zunächst wurde den Schülern ein Pretest ausgehändigt, um ihre Vorerfahrungen mit spezifischen für die Untersuchung relevanten Begriffen festzuhalten. Hierin wurde nach dem Begriff der Funktion, den Eigenschaften von Funktionen, dem Graphen einer Funktion sowie nach linearen und quadratischen Funktionen gefragt. Zudem sollten die Schüler ihre unterrichtlichen Erfahrungen mit der Arbeit mit Funktionen mit digitalen Medien erläutern.

Im Anschluss wurde den Schülern zur weiteren Arbeit die Definitionen zu den erfragten Begriffen aus dem im Unterricht verwendeten Lehrwerk (Zahlen und Größen) sowie eine Gebrauchsanweisung für das Programm „Graphendrucker“ ausgehändigt. Mit diesem Programm sollten die Schüler dann ein Modell einer linearen sowie eines einer quadratischen Funktion konstruieren. Die virtuellen Modelle wurden dann mit dem 3D-Drucker gedruckt. In der Zwischenzeit haben die Schüler einen schriftlichen Reflexionsbogen zu ihrer Arbeit mit dem Programm „Graphendrucker“ ausgefüllt. Hierin sollten zunächst das Vorgehen, entstandene Schwierigkeiten und positive Aspekte des Arbeitsprozesses beschrieben werden. Anschließend wurde der Zusammenhang des Programms mit dem Thema Funktionen, der Zusammenhang mit der Definition einer Funktion sowie der Zusammenhang mit anderen Unterrichtssituationen (Taschenrechner, Computer, Schulbuch, etc.) erfragt.

Für die weitere Arbeit wurden den Schülern die zu der linearen sowie der quadratischen Funktion gehörenden 3D-gedruckten Objekte ausgehändigt (siehe Abb. 3). Es folgte ein weiterer Reflexionsbogen, in dem die Schüler zunächst die Eigenschaften der Objekte beschreiben und eine Bezeichnung für diese finden sollten. Zudem sollte begründet zu der Aussage „Das ist doch keine Mathematik was wir heute gemacht haben!“ Stellung genommen werden. Mit dieser Aussage sollte untersucht werden, ob die Objekte nach Auffassung der Schüler Teil der Mathematik sind. Anschließend wurde der Zusammenhang zum Thema Funktionen und zu der Definition einer Funktion erfragt. Der passende Funktionsterm zum Objekt sollte bestimmt werden.

Damit sich die Schüler gezielt mit Handlungen an den Objekten befassen, wurden ihnen die beiden Darstellungen nach Tall (2013) (Abb. 7) nacheinander vorgelegt. Die Schüler sollten die dargestellten Handlungen durchführen und beschreiben. Außerdem sollte jeweils erläutert werden, welche Eigenschaften von Funktionen im Vordergrund stehen und was ihnen bei dem zur linearen bzw. zur quadratischen Funktion gehörigen Objekt auffällt. Anschließend sollten beide Handlungen verglichen werden.

Im Sinne einer vorstellungsorientierten Kurvendiskussion (vgl. Hahn, 2005) wurden die Schüler zusätzlich nach der Steigungsveränderung beim Abfahren der einzelnen Objekte mit den Fingern, nach Besonderheiten am Scheitelpunkt und nach Symmetrien gefragt.

Im Anschluss sollten dann die Objekte noch in ein beigefügtes Koordinatensystem gestempelt werden. Die Schüler wurden in einem letzten Reflexionsbogen über den Unterschied zwischen dem Objekt und dem gestempelten Bild, den Zusammenhang der Definition einer Funktion mit dem Stempelbild und den Funktionsterm zum Bild befragt.

Die Schüler wurden während des gesamten Arbeitsprozesses sowie in den Reflexionsphasen videographiert. Die schriftlichen Reflexionsbögen wurden von Schülerpaaren gemeinsam ausgefüllt, sodass auch die Aushandlungsprozesse in der Kommunikation der Schüler festgehalten werden konnten. Im Anschluss an die Erhebung wurden Gruppeninterviews, mithilfe eines Leitfadens, mit den Schülern geführt, damit ihre Vorstellungen noch einmal gezielt erfragt und einzelne Situationen detailliert diskutiert werden konnten. Durch die Gruppeninterviews konnte auch ein inhaltlicher Austausch zwischen den einzelnen Schülern initiiert werden.

Zur genaueren Analyse des Datenmaterials wurde die Forschungsfrage in mehrere Teilfragen untergliedert:

- Welche Subjektiven Erfahrungsbereiche lassen sich bei den Lernenden beschreiben?
- Bestehen die Subjektiven Erfahrungsbereiche der Schüler isoliert voneinander oder werden sie miteinander verbunden?
- Welche Aspekte der Subjektiven Erfahrungsbereiche der Schüler betreffen den Kovariationsaspekt Funktionalen Denkens?
- Welche Aspekte der Subjektiven Erfahrungsbereiche der Schüler betreffen den Objektaspekt Funktionalen Denkens?
- Welche Elemente werden von den Schülern als Referenzobjekte zur Wissensentwicklung im Rahmen empirischer Theorien verwendet?

Für die Analyse wurde das Videomaterial nach den Regeln von Dresing und Pehl (2015) transkribiert. Die generierten Daten wurden anschließend nach dem Verfahren der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) kategorisiert, um eine systematische Darstellung der Ergebnisse zu gewährleisten. Die strukturierende Inhaltsanalyse erfolgt im Wesentlichen in vier Schritten. Zunächst wird das zu analysierende Material detailliert beschrieben. Hierbei handelt es sich sowohl um die schriftlichen Aussagen der Schüler als auch um die Transkripte der Arbeitsphasen, der Reflexionsphasen und der Gruppeninterviews. Die Analyseeinheit beinhaltet im vorliegenden Fall jede sinnvolle Texteinheit. Im zweiten Schritt werden die relevanten Textteile in einer auf den Inhalt beschränkten Form zusammengefasst (Paraphrasierung). Die Paraphrasen werden dann auf einer definierten Abstraktionsebene generalisiert. Zu diesem Zweck können auch theoretische Vorannahmen verwendet werden. Die Anzahl der verallgemeinerten Aussagen wird dann mehrfach reduziert, indem der Abstraktionsgrad erhöht und gleichbedeutende Aussagen entfernt werden. Im dritten Schritt werden die Aussagen in einem Kategoriensystem zusammengefasst, das im vierten Schritt anhand des Materials überprüft wird. Eine vereinfachte Darstellung der Methode ist in Abb. 9 zu sehen.

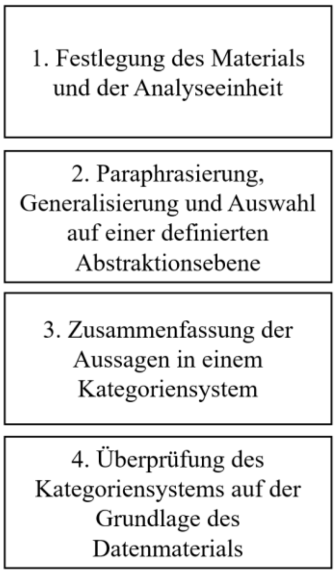

Abb. 9: Vereinfachte Darstellung der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse

4.2 Diskussion der Ergebnisse

Zur Strukturierung der qualitativen Inhaltsanalyse wurde zunächst auf der Basis des theoretischen Hintergrunds und den daraus resultierenden Forschungsfragen ein System aus Oberkategorien gebildet, welches in Tab. 1 dargestellt ist. Die mittels strukturierender Inhaltsanalyse induktiv ermittelten Kategorien werden in dieses deduktiv festgelegte Kategoriensystem eingeordnet.

Oberkategorie 1: Subjektive *Erfahrungsbereiche* Definition: Alle Abschnitte, die auf die Entwicklung und Verbindung von Subjektiven Erfahrungsbereichen hindeuten
Oberkategorie 2: *Kovariationsaspekt* Definition: Alle Abschnitte, die auf Vorstellungen der Kovariation hindeuten
Oberkategorie 3: *Objektaspekt* Definition: Alle Abschnitte, die auf Vorstellungen zur Funktion als Ganzes hindeuten
Oberkategorie 4: *Referenzobjekte* Definition: Alle Abschnitte, die auf empirische Referenzobjekte bei der Begriffsentwicklung der Schüler hindeuten

Tab. 1: Deduktiv gebildetes System aus Oberkategorien zur Analyse der Aussagen der Schüler

Insgesamt konnten 12 Kategorien induktiv gebildet werden. Diese werden im Folgenden detailliert beschrieben und mit Ankerbeispielen versehen. Ein vollständiges tabellarisches Kategoriensystem kann dem Anhang (Tab. 2) entnommen werden.

4.2.1 Oberkategorie 1: Subjektive Erfahrungsbereiche

Aus den Aussagen und Beschreibungen der Schüler ließen sich vier Kontexte rekonstruieren, in denen die Schüler unterschiedliche Subjektive Erfahrungsbereiche gebildet haben. Die vier Kontexte spiegeln sich in den unterschiedlichen Arbeitsphasen wider und wurden damit durch die Konzeption der Erhebung gesetzt. Es handelt sich um die Kontexte „Pretest", „Graphendrucker", „3D-Objekte" und „Stempeln". Sie unterscheiden sich insbesondere durch die unterschiedlichen Referenzobjekte in den Argumentationen der Schüler. Wesentliche Unterschiede im Sprachgebrauch lassen sich nicht ausmachen.

Pretest

Der Kontext „Pretest" ist durch das gemeinsame Ausfüllen des ersten Reflexionsbogens bestimmt. Die unterrichtlichen Vorerfahrungen der Schüler mit Funktionen stehen im Zentrum der Subjektiven Erfahrungsbereiche. Die Vorstellungen sind durch eine starke graphische Orientierung geprägt, aber auch symbolische Elemente wie der Funktionsterm werden von den Schülern erläutert.

> Schüler B: Also in f von x gleich m x plus n. Wo n ist immer der Startpunkt, also der Schnittpunkt der y-Achse. Und m ist halt die Steigung. Und wenn man dann x einsetzt, kann man halt, ähm, m mal x rechnen und dann plus, wenns halt ner Schnittpunkt nochmal mit der y-Achse woanders ist außer 0 0, und dann kann man halt, ähm, je nachdem welchen x-Wert man einsetzt, zum Beispiel Punkt 1 2 3 4, ähm, dann kann man halt den jeweiligen y-Wert dafür ausrechnen für den Punkt. (Interview 1)

> Schüler C: Also, ja, bei diesem „Was ist eine Funktion?" haben wir erstmal die Funktionsgleichung aufgeschrieben für die lineare und die quadratische Funktion. Dann haben wir noch dazu geschrieben, dass halt, äh, beide Funktionen in einem Koordinatensystem als Graph dargestellt werden können. (Interview 2)

> Schüler F: Also in der Schule hatten wir das ja so f von x gleich (..) irgendwas. So und das waren halt meistens Variablen, zum Beispiel a x hoch zwei. Wären ja dann Variablen in dem Falle. Und, ja. (Interview 3)

Graphendrucker

Im Zentrum des Kontexts „Graphendrucker" stehen die subjektiven Erfahrungsbereiche, welche die Schüler im Umgang mit der CAD-Software „Graphendrucker" gesammelt haben. Es werden besonders zwei Elemente des Programms angesprochen: Dies ist zum einen die Eingabe des Funktionsterms in das Befehlsfeld des Programms. Hierfür müsse der Funktionsterm mit Hilfe einer Anleitung etwas umgeschrieben werden, um den Anforderungen des Programms zu genügen. Es handelt sich für die Schüler somit um eine andere Darstellungsform, die Verbindung zur Darstellung als Funktionsterm scheint aber gegeben zu sein. Zum anderen wird von den Schülern die Ausgabe des Programms als virtuelles 3D-Objekt beschrieben. Hierin sehen die Schüler die Darstellung als Funktionsgraphen. Der Unterschied zu anderen Darstellungen eines Funktionsgraphen läge in der Dreidimensionalität. Diese wird nicht als Eigenschaft des Graphen selbst, sondern als Eigenschaft des 3D-Modells gesehen, damit es mit dem 3D-Drucker ausgedruckt werden kann.

> Schüler D: Wir haben einfach, ähm, wir haben als Beispiel eine Funktionsgleichung angegeben und das Programm hat uns halt die, äh, Funktionsgleichung in einen Graphen, beziehungsweise äh, in eine lineare oder quadratische Funktion angegeben. (Interview 2)

> Schüler F: Ja, also hier war ja irgendeine Anleitung (nimmt Zettel), wo gesagt wurde, wie man was eingeben muss. Also zum Beispiel zu ganzen mathematischen Sachen beim Programmieren, wie man das eingeben muss.
> Interviewer: Mhm.
> Schüler F: Und das haben wir dann zu einer Funktionsgleichung eingetragen und joa. (Interview 3)

> Schüler B: Wenn man die zeichnet ja nicht. Also wenn man die, ähm, im Buch zeichnet, hat man die ja eigentlich nicht die Breite, hat man einfach nur ne Linie. Aber wenn man die dann hier ausdruckt, habn wir ja jetzt hier ne gewisse Breite, damit´s n Körper wird. (Interview 1)

> Schüler C: Die Gleichung gibt halt nur die ähm x und y Werte an. Also halt nur die (.) Länge und die Breite. Aber ähm, halt wie (unverständlich) es halt schonmal erwähnt hatte, dass da dieses Programm halt für den drei D Druck gemacht wurde, vermute ich jetzt mal, wurde halt auch noch die Höhe hinzugefügt, weil es halt im drei D Druck halt wichtig ist. (Interview 2)

3D-Objekte

Der Kontext „3D-Objekte" ist durch die Arbeit der Schüler mit den 3D-gedruckten Modellen bestimmt. Betont werden die Handlungen, die sich an den Modellen ausführen lassen. Die 3D-Objekte sind nach Aussage der Schüler Funktionsgraphen. Es gebe aber auch verschiedene Unterschiede zu einem klassischen Funktionsgraphen. Dies sei in erster Linie die Möglichkeit, diesen anfassen zu können. Zur visuellen Wahrnehmungsmöglichkeit kommt damit die sensorische Ebene hinzu. Außerdem sei die Darstellung wie bereits im Programm „Graphendrucker" dreidimensional und beinhalte kein Koordinatensystem.

Schüler B: Ähm, wir haben verschiedene Handlungen, wie beschrieben daran ausgeführt so (vollzieht die Handlungen erneut) und haben die halt ein bisschen uns angeguckt so, weil man die halt mal in 3D anfassen konnte anstatt immer ähm anstatt die halt nur zeichnerisch zu sehen. Und hat man die dann in 3D, konnte ein bisschen dran rumspielen, bisschen angucken so. (Interview 1)

Interviewer: Ähm, und dann das gedruckte. Was hat das mit Funktionen zu tun?
Schüler F: Genau dasselbe, aber das ist halt\ man kann´s in die Hand nehmen. Also man kann sich das vielleicht schlecht vorstellen, aber das ist ein
Schüler E: Das ist halt eigentlich mehr oder weniger der Graph einfach.
Schüler F: Ja.
Interviewer: Was heißt „mehr oder weniger“? Was ist anders? Wenn man sagt „mehr oder weniger“, findet man das anders? Oder findet ihr das gleich?
Schüler E: Ja, das ist ja jetzt nicht im Koordinatensystem drin, ja, das ist einfach nur der Graph. (Interview 3)

Stempeln

Der vierte Kontext „Stempeln“ ist durch das Stempeln der 3D-Objekte in ein gegebenes Koordinatensystem gesetzt. Durch das Stempeln könne man den vorher nicht eindeutig definierten Graphen verorten. Die Gerade könne man verschieden Drehen, sodass unterschiedliche Steigungen entstehen. Die Parabel könne nach oben oder nach unten geöffnet gestempelt werden. Damit wird der Funktionsgraph von den Schülern als geometrisches Objekt im Sinne einer Kurve aufgefasst.

Schüler F: Stempelkissen bekommen und haben halt die Figuren, ja nicht Figuren, Körper in das Stempelkissen gedrückt und dann auf die Koordinatensysteme. (Interview 3)

Schüler B: Mh. Ist zwar nicht immer perfekt geworden, aber man konnte das halt quasi einfach nochmal reinstempeln und dann konnte man das halt auch ganz gut sehen. Muss man halt eigentlich \ muss man halt sehr genau drauf aufpassen, dass recht gut zu machen. Aber wir haben es halt einfach mal einmal reingestempelt. Man muss halt gucken, dass das eigentlich bei der Parabel mal ein bisschen besser läuft. Bei sowas hier (demonstriert mit Modell der linearen Funktion) ist es halt leichter einfach so zu machen und ähm hier (Modell der Parabel) muss man ja eigentlich so ein bisschen den Scheitelpunkt recht genau treffen, also das ist schwierig hierbei. (Interview 1)

Schüler C: Ja, mit diesen Objekten haben wir das dann bei dem\ bei dem weiteren Reflexionsbogen veranschaulicht, weil (..) es war halt\ Es kommt immer darauf an. Sag ich mal. Weil wir hatten halt zum Beispiel Aufgabe\ Was die Eigenschaft von diesem Objekt ist, was wir jetzt als ne Gerade haben. Das man halt die Gerade unterschiedlich drehen kann und dann hängt es davon ab, wie gut die Steigung ist oder halt wie groß die sink\ die Senkung ist. Und, äh, bei der Parabel war es dann halt auch so, dass zum Beispiel wenn man´s jetzt so dreht (dreht Modell), dass halt sie nach oben geöffnet ist, aber man könnte sie halt auch nach unten drehen, dann wäre sie halt unten geöffnet (dreht Modell). (Interview 2)

Zusammenhang der subjektiven Erfahrungsbereiche

Die Aussagen der Schüler deuten stark darauf hin, dass sie die Perspektiven der verschiedenen subjektiven Erfahrungsbereiche in einem vergleichenden subjektiven Erfahrungsbereich vernetzen konnten. So geben die Schüler an, dass es sich in allen Kontexten um Funktionen handelt. Diese werden in den einzelnen Situationen verschieden dargestellt, wodurch bestimmte Eigenschaften deutlicher bzw. weniger deutlich werden. Auch der wenig unterschiedliche Sprachgebrauch in den subjektiven Erfahrungsbereichen spricht für deren kognitive Verbindung.

Schüler B: Also an sich war ja alles so, man konnte ja für alles Mögliche so, also für ähm ob man es jetzt aufzeichnet, oder ob man es ausrechnet, oder ob man es jetzt in dem Programm erstellt oder hier in der Hand hat, ist ja überall dieselbe Funktionsgleichung, wenn man jetzt denselben Körper nimmt. Also es ist schon irgendwo das gleiche, aber es ist immer ein Unterschied, ob man es dann mal wirklich anfassen kann, ob man es jetzt hier in allen 360 Grad Richtungen sehen kann oder ob man es einfach nur auf Papier zeichnet oder einfach nur auf dem Taschenrechner in ner Wertetabelle ausrechnet und darstellt, ist es halt schon n Unterschied für die Erfahrung zum Sammeln, wie es halt ist. Dass man halt ein bisschen mit rumspielen kann. Also ich, ich finde es schon so interessanter, wenn man es so einmal anpacken kann und grafisch auch in 360 Grad bewegen kann und nicht nur einfach ne Linie auf Papier zeichnet. (Interview 1)

Schüler D: Ähm. Also ähm ich\ ähm wir glauben halt, dass es, ähm, es ist halt eigentlich\ es ist das gleiche. Aber hier ist es halt, äh, wieder genauer in dem Koordinatensystem angegeben. Und hier ist es halt genau gedruckt worden. Es ist halt eigentlich alles das gleiche, ja. (Interview 2)

Schüler F: Also ich würde sagen, es ist in nem gewissen Maß immer dasselbe, aber jetzt für Leute, die sich schwer Sachen vorstellen können, ist zum Beispiel drucken leichter. So dann gibt´s die Leute, die handwerklich nichts anfangen können und eher alles im Kopf machen, wie ich zum Beispiel, die ha\ finden sowas (zeigt auf Laptop) oder sowas (zeigt auf Gestempeltes) wesentlich leichter dann. (Interview 3)

4.2.2 Oberkategorie 2: Kovariationsaspekt

Viele verschiedene Textstellen können der Oberkategorie „Kovariationsaspekt“ zugeordnet werden. Aus den Aussagen konnten zwei Kategorien gebildet werden. Die Kategorien sind die Wahrnehmung der Änderung der Funktionswerte beim Umgang mit den 3D-Modellen sowie hieraus erwachsene erste Vorstellungen zur Krümmung.

Wahrnehmung der Änderung der Funktionswerte

Die Schüler erläutern an verschiedenen Stellen des Interviews, wie sie in Anlehnung an die Handlungen nach Tall (2013) mit den Händen über die 3D-gedruckten Modelle gefahren sind. Dabei hätten sie die Änderung der Funktionswerte wahrnehmen können. Diese unterscheide sich bei linearen und quadratischen Funktionen. Bei dem Modell zur linearen Funktion habe es sich immer um die gleiche Steigung gehandelt, während die Steigung bei dem Modell zur quadratischen Funktion immer weiter zugenommen habe.

> Schüler B: […] Und hat die dann halt abgefahren, wir sollten die ja mit der Hand abfahren oder auch so mit der Hand ungefähr abfahren. Und dann hat man halt festgestellt, dass zum Beispiel, wenn man das mit dem Finger macht, man halt nicht so viel merkt, außer dass man halt in verschiedene Richtungen bewegt. (Interview 1)

> Schüler B: Und dann sollte man halt mit dem Finger diese Parabel hier so abtasten und hat halt dabei dann gemerkt, je nachdem wie sich die Parabel halt verändert, dass zum Beispiel am Anfang ne geringere Steigung ist und dann der Finger zum Beispiel höher steigt schneller. (Interview 1)

> Schüler B: Also bei der linearen Funktion, die wäre ja eigentlich jetzt so ungefähr (zeigt mit Modell) im Koordinatensystem. Oder so (bewegt das Modell) oder wie auch immer. Und daran merkt man halt auch, dass es ähm, ne gleichförmige Steigung \ also dass es immer die gleiche Steigung ist. (Interview 1)

Vorstellungen zur Krümmung

Beim Umgang mit den 3D-Modellen haben die Schüler erste präformale Vorstellungen von Krümmung entwickelt. Während der Finger bei dem Modell zur linearen Funktion gerade aufliegen konnte, musste er beim Modell zur quadratischen Funktion stark gebeugt werden. Am Scheitelpunkt wurde der Kurvencharakter deutlich, indem die Schüler eine Wölbung anstelle scharfer Kanten erfühlt haben.

> Schüler B: […] Und wenn man mit der Hand das richtig macht, kann man halt richtig die Steigung erkennen, weil man irgendwann die Hand nicht mehr so biegen kann, zum Beispiel.
> […]
> Schüler B: Eigentlich nicht. (lacht) Also ich\ mit der Hand hat man halt mehr gemerkt, dass es wirklich die richtige Steigung ist, weil man das halt nicht so biegen kann. Also da hat man es auch gemerkt, nicht nur gesehen. Und mit dem Finger hat man es halt auch irgendwo gemerkt, dass man den halt auch in ner anderen Bewegung macht, aber nicht wirklich. (Interview 1)

> Interviewer: Ja, und da (zeigt auf Modell der linearen Funktion)? Wie war das da?
> Schüler B: Ja (streicht mit Finger über Modell) da war´s halt grade. Da hat man nicht so viel Unterschied gemerkt. Da hat man halt gemerkt, dass man die Hand einfach grade auflegen kann, ähm und es sich einfach grade anfühlt, relativ. Bisschen grob anfühlt und halt einfach ähm, dass\ dass das ne gerade Funktion ist, ne lineare Funktion, hat man halt dann gemerkt. (Interview 1)

> Schüler A: Und man hat dann auch deutlich die Wölbung gespürt, also, dass das keine zwei Geraden sind, die einfach zusammenlaufen an einem Punkt, sondern dass das halt einfach ne Parabel ist. (Interview 1)

4.2.3 Oberkategorie 3: Objektaspekt

Die Schüler haben viele Erkenntnisse zu lokalen und globalen Eigenschaften der betrachteten Funktionen anhand der 3D-Modelle erläutert, die der Oberkategorie „Objektaspekt“ zugeschrieben werden können. Hierzu zählen Symmetriebegründungen an den 3D-Objekten, erste Vorstellungen zu Kriterien für Extrempunkte sowie Aussagen zur Folge von Drehung und Verschiebung der Objekte.

Symmetriebegründungen an dem 3D-Objekt

Die Schüler nutzen die 3D-Objekte zur Untersuchung von Achsen- und Punktsymmetrie linearer und quadratischer Funktionen. Dazu verwenden sie verschiedene Vorstellungen, z. B. den Graphen auseinanderzuschneiden und umzuklappen oder einen echten Spiegel am Objekt anzusetzen. Die Aussagen zur Symmetrie werden sowohl mit als auch ohne Koordinatensystem getroffen. So sei das zur linearen Funktion gehörige Objekt ohne Koordinatensystem Punkt- und Achsensymmetrisch, wenn man es aber im Koordinatensystem verortet, so kann diese Eigenschaft mit Bezug auf den Ursprung und die y-Achse verloren gehen. Auf diese Weise gelangen die Schüler zu einem erweiterten Symmetrieverständnis mit Bezug auf Kurven anstelle von Funktionsgraphen. Dadurch wird auch die Punkt- und Achsensymmetrie außerhalb einer Ursprungs- und y-Achsensymmetrie in einen sinnvollen Kontext gerückt.

> Schüler F: Also der, äh, die Gerade ist punkt- und achsensymmetrisch. Also, äh, ich könnte jetzt das in der Mitte durchschneiden und einmal drehen und es wäre genau dasselbe.
> Schüler E: Ja, es kommt eigentlich auch immer darauf an, wie es gerade liegt.

Interviewer: Mhm. Wollen wir uns das mal angucken? Also wir haben ja hier zum Beispiel ein Koordinatensystem. Was heißt „wie das liegt“? Was meintest du damit?
Schüler E: Äh, ja, also, so wäre es jetzt zum Beispiel nicht achsensymmetrisch, weil wenn man jetzt hier zum Beispiel auf die y-Achse nen Spiegel stellen würde, dann sähe das ja jetzt nicht so aus wie es da abgebildet ist.
Schüler F: Aber, wenn man es jetzt so machen würde (legt Geraden-Modell auf x-Achse), wäre es ja wieder achsensymmetrisch.
Interviewer: Mhm.
Schüler F: Also jetzt abgesehen von dem kleinen Schönheitsfehler (lacht).
Interviewer: Was ist mit Punktsymmetrie?
Schüler F: Achso. Also man könnte das jetzt durchschneiden und knicken und es wäre genau dasselbe.
Interviewer: Mhm.
Schüler F: So das würde hier nicht gehen (nimmt Parabel-Modell). Weil das wär dann (…) falsch rum.
Interviewer: Mhm.
Schüler F: So man kann halt schwer erklären, das wäre dann falschrum.
Interviewer: Ja, mhm.
Schüler E: Ja, aber hier wäre es auch wieder so (nimmt Geraden-Modell), wenn der\ dann müsste der Punkt auch genau in der Mitte sein. Der kann jetzt nicht hier sein (zeigt auf Stelle auf dem Modell), also weiter hier. Da wäre es ja dann anders.
Interviewer: Mhm.
Schüler F: So, und hier ist es so (nimmt Parabel-Modell). Beim Scheitelpunkt, wenn man jetzt n Spiegel nehmen würde, das wäre genau gleich. Also achsensymmetrisch. (Interview 3)

Vorstellungen zu Kriterien für Extremstellen

Im Umgang mit den 3D-Objekten entwickelten die Schüler erste Zusammenhänge zwischen dem Steigungsverlauf des Funktionsgraphen und dem Scheitelpunkt als Extrempunkt. So sprechen die Schüler davon, dass die Parabel am Scheitelpunkt keine Steigung hat. Dies ist eine präformale Beschreibung des notwendigen Kriteriums für Extremstellen. Andere Schüler erklären, dass die Steigung bis zum Scheitelpunkt immer weniger stark fällt und ab dort wieder immer stärker ansteigt. Hierbei handelt es sich um erste Vorstellungen des Vorzeichenwechselkriteriums.

Schüler F: Scheitelpunkt. Das heißt der tiefste Punkt. Dann sieht man, hier ist die Steigung. Das ist bei ner Parabel. Gut, jetzt hier bei ner Geraden (nimmt das andere Modell in die Hand) ist das n bisschen schwieriger, weil, äh, ist halt ne Grade, aber so kann man halt die Steigung se\ fühlen.
[…]
Schüler F: Mhm. Von da geht die Steigung aus. Also das ist die tiefste Stelle und je weiter nach rechts oder nach links man geht, desto höher steigt die an.
Interviewer: Aha. Und am Punkt selbst?
Schüler F: Gar nichts, würde ich jetzt sagen, oder? (Interview 3)

Schüler B: Also das x Quadrat verändert ja immer die Steigung und dadurch fällt\ merkt man halt auch, dass es am Anfang zum Beispiel hier schneller fällt, dann langsamer fällt, also man weniger runterkommt, dann irgendwann am Scheitelpunkt am Wendepunkt ist und dann halt langsam und dann auf einmal wieder schneller hochgeht. (Interview 1)

Schüler C: Ja, das ist dann halt \ Kommt halt drauf an wie, äh, die Parabel geöffnet ist. Wenn sie halt nach oben geöffnet ist, und dann sag ich mal von links anfängt, ist das erst ne äh\ sinkt die erst, bis zu dem bestimmten Scheitelpunkt und ab da steigt sie dann aber halt symmetrisch (zeichnet mit Finger auf Tischplatte).
Interviewer: Mhm. Was, was ist am Scheitelpunkt? Was passiert da?
Schüler C: Am Scheitelpunkt, ähm, spiegelt sie sich.
Schüler D: wieder und steigt halt. Äh, oder sinkt. (Interview 2)

Verschiebung und Drehung

Auf die Frage hin, welche Folgen eine Drehung oder Verschiebung der Objekte im Koordinatensystem hat, finden die Schüler vielfältige Antworten. So erkennen sie, dass eine Verschiebung der Objekte die Steigung des Graphen nicht beeinflusst. Eine Drehung des Modells zur linearen Funktion bedeute eine Änderung der Steigung. Die Steigung der Parabel sei bei einer Drehung im Prinzip immer noch gleich, eine Interpretation im Koordinatensystem aber nicht sinnvoll. Zu vermuten ist, dass die Schüler an dieser Stelle eigentlich die Veränderung der Steigung meinen. Die Vermutung der Schüler ist im Kontext von Kurven als Invarianz der Krümmung unter Drehungen zu beschreiben.

Schüler C: Also, ähm, bei der Geraden von der linearen Funktionsgleichung. Wenn ich es als Objekt habe, hängt es dann wieder davon ab, wie ich es halt drehe. Wenn ich es jetzt, sag ich mal, so drehe, hat es ne Steigung, aber, wenn ich es halt zum Beispiel so drehe, sinkt es halt (dreht jeweils das Modell). Deswegen hängt es bei der, äh, linea\ jetzt bei dem Graphen von der linearen Funktionsgleichung davon ab, wie man sie dreht. (Interview 2)

Schüler B: Die Parabel verschiebe? (macht Bewegung mit Modell)
Interviewer: Zum Beispiel
Schüler B: oder so drehe, dann ist an der Parabel an sich die Steigung noch gleich (fühlt mit Finger über Modell), aber, wenn man jetzt im Koordinatensystem die so drehen würde, dann wär die Steigung hier halt einfach so (fühlt mit Finger) und dann würde es halt irgendwann zurückkommen und das würde keinen Sinn jetzt machen. (Interview 1)

Schüler B: Ähm, verschieben nach links und rechts (verschiebt Modell) macht eigentlich nichts mit der Steigung, ähm, da bleibt die Steigung relativ\ ähm, ja

da bleibt die Steigung gleich, je nachdem wo man die jetzt anordnet. Aber sobald man, ähm, in y verschiebt, ist halt die Höhe immer ein anderer Punkt.
Interviewer: Die Höhe ist ein anderer Punkt. Mhm. Und die Steigung ist dann auch anders oder?
Schüler B: Ähm, die Steigung bleibt gleich, würde ich sagen.
Interviewer: Ja? Du? (zu Schüler A) Was würdest du sagen?
Schüler A: Ja, die bleibt auch gleich, weil, ähm, der Punkt auf der y-Achse bleibt ja an sich gleich, nur halt verschoben. (Interview 1)

Schüler C: Also wenn ich jetzt (..) das Objekt, ähm, von dem y-Achsenabschnitt einen Punkt nach oben verschiebe oder zwei Punkte statt\ ändert sich an der Steigung nichts, weil ich, äh, es ja nicht gedreht habe. Dasselbe ist auch hier (nimmt Parabel-Modell), die bleibt auch, auch wenn ich sie vom y- oder x-Abschnitt halt verschiebe. (Interview 2)

4.2.4 Oberkategorie 4: Referenzobjekte

Bei der Theorienentwicklung im Rahmen der Erhebung nehmen die Schüler in ihren Begründungsprozessen immer wieder Bezug auf die empirischen Objekte (bspw. 3D-gedruckte Graphen), was nahelegt, dass sie eine empirisch-gegenständliche Auffassung über lineare und quadratische Funktionen entwickeln. Bei den empirischen Objekten handelt es sich im Wesentlichen um die 3D-gedruckten Objekte. Hinzu kommen weitere Objekte, die Teil der Erhebung (z. B. gestempelte Kurven) oder bereits aus dem Unterricht bekannt waren (z. B. Graphen in Schulbüchern).

3D-Objekte als Referenzobjekte

Ein Großteil der Begründungen der Schüler nimmt Bezug auf die 3D-gedruckten Objekte. So wird beispielsweise in verschiedenen Situationen, die sich verändernde Steigung durch Handlungen an den Modellen „erfühlt“. Dabei wird die Steigung nicht numerisch bestimmt, vielmehr wird der verlauf qualitativ ermittelt und beschrieben. Hieraus werden dann auch Folgerungen beispielsweise zur Symmetrie der Funktion oder zu Kriterien für Extremstellen gemacht.

Schüler B: Und dann sollte man halt mit dem Finger diese Parabel hier so abtasten und hat halt dabei dann gemerkt, je nachdem wie sich die Parabel halt verändert, dass zum Beispiel am Anfang ne geringere Steigung ist und dann der Finger zum Beispiel höher steigt schneller. (Interview 1)

Weitere Referenzobjekte

Verschiedene weitere empirische Objekte werden in den Argumentationen der Schüler im Rahmen ihrer beschreibbaren empirischen Theorien herangezogen. Dazu zählen unter anderem das Koordinatensystem mit den gestempelten Kurven und das virtuelle Modell am Computer. Auch auf bereits kennengelernte Darstellungen wie durch einen grafikfähigen Taschenrechner erzeugte oder in Schulbüchern abgedruckte Funktionsgraphen wird vergleichend Bezug genommen.

Schüler D: Ja, also das ist auch die, äh, bildliche Zeichnung. Nur halt, dass das wieder zweidimensional ist und man darauf halt wieder sehr gut die Punkte erkennen kann und die Gleichung wieder rauslesen kann und sich dann, ähm, vergleichen kann, ob man´s richtig gemacht hat oder nicht. Also das ist halt, ähm, in dem Fall (zeigt Modell) nicht so. Also natürlich ist es hier viel genauer. Man kann es auch an dem Koordinatensystem anlegen und, ähm, aber hier ist es halt anders (zeigt auf gestempeltes Bild). Man kann halt die ganzen Punkte ablesen. (Interview 2)

5. Fazit und Ausblick

In diesem Artikel konnte der Beitrag des Ansatzes eines empirisch-gegenständlichen Mathematikunterrichts unter Einsatz haptischer Modelle von Funktionsgraphen im Rahmen Funktionalen Denkens beschrieben werden.

Der theoretische Hintergrund, bestehend aus den Grundvorstellungen zu Funktionen als normative Perspektive und den Subjektiven Erfahrungsbereichen als deskriptive Perspektive, haben sich eingebettet in das Konzept der empirischen Theorien als wirkungsvolles Instrument zur Untersuchung der Fördermöglichkeiten Funktionalen Denkens mit haptischen Modellen erwiesen.

Im Rahmen der empirischen Untersuchung konnten durch den Umgang mit dem Programm „Graphendrucker“ und der Arbeit mit den Modellen entwickelte subjektive Erfahrungsbereiche der Schüler in vier Kontexten beschrieben werden (Pretest, Graphendrucker, 3D-Objekte, Stempeln). Auf Grund des sich wenig unterscheidenden Sprachgebrauchs und der Aussage der Schüler, es gehe in allen Situationen um Funktionen, lässt sich vermuten, dass die subjektiven Erfahrungsbereiche der einzelnen Schüler nicht isoliert voneinander bestehen, sondern jeweils in einem zusammenführenden Subjektiven Erfahrungsbereich verbunden sind.

Das Ergebnis der Analyse in Bezug auf die Aspekte Funktionalen Denkens zeigt das Potential zur Förderung des Kovariations- und des Objektaspekts auf. Die Schüler nehmen die gegenseitige Änderung der Funktionswerte wahr und entwickeln erste Vorstellungen von Krümmung. Diese Erkenntnisse sind insbesondere im Rahmen der Analysispropädeutik von großem Wert. Lokale und globale Eigenschaften von Funktionen, wie Symmetrien, Extremstellen und die Folgen von Verschiebungen und Drehungen werden von den Schülern handlungsorientiert an den 3D-Objekten erarbeitet. Auf diese Weise können wichtige Elemente der späteren Funktionsuntersuchung bereits in der Sekundarstufe I qualitativ kennengelernt werden.

Die entscheidenden Referenzobjekte der empirischen Theorien der Schüler sind die 3D-gedruckten Objekte. Hinzu kommen weitere Objekte aus der Erhebung (abgedrucktes Koordinatensystem, virtuelles Modell am Computer, etc.) und dem Mathematikunterricht der Schüler (Graphen im Schulbuch, etc.).

Die gewonnenen Ergebnisse zum Einsatz des Programms „Graphendrucker“ und 3D-gedrucker Modelle von Funktionsgraphen können in weiten Teilen auch auf den Einsatz von dynamischer Geometriesoftware und Parabelschablonen bzw. Lineale übertragen werden. Insbesondere das Zeichnen mit einer Schablone und das Stempeln der Modelle scheint vergleichbar zu sein und damit ähnliche Aushandlungsprozesse auslösen zu können. Sensorische Erfahrungen bezüglich der Steigung des Graphen sind ebenfalls mit beiden Modellen möglich, wobei dies mit den 3D-gedruckten Modelle naheliegender und einfach auszuführen ist. So kann beispielsweise der Finger von beiden Seiten an das Modell gesetzt werden, sodass die Erfahrung vielfältiger wird. Welche Rolle die Entwicklung eigener Modelle mit dem Programm im Begriffsentwicklungsprozess spielt, konnte in der empirischen Untersuchung nicht festgestellt werden. Zwar wurde an verschiedenen Stellen der Argumentation der Schüler auf das virtuelle Modell im Programm verwiesen und die Rahmenbedingungen der Untersuchung scheinen nicht zur Entwicklung isolierter subjektiver Erfahrungsbereiche geführt zu haben, dies könnte aber auch unter anderen Bedingungen, z. B. bei der Benutzung von dynamischer Geometriesoftware und der anschließenden Arbeit mit Parabelschablonen und Linealen der Fall sein. Der Vorteil der 3D-gedruckten Modelle liegt insbesondere in ihrer Individualität, die eine Anpassung an die Bedürfnisse der einzelnen Schüler erlaubt. Die ontologische Bindung des entwickelten Wissens an die Objekte scheint bei der eigenen Auswahl des zu untersuchenden Funktionsgraphen besonders stark zu sein. Durch die Vielzahl an möglichen zu untersuchenden Funktionen ist die weitere Nutzung der Modelle im Analysisunterricht an verschiedenen Stellen möglich.

Natürlich sind mit einer empirischen Analysis mit haptischen Modellen von Funktionsgraphen auch gewisse Herausforderungen verbunden. So gehören bestimmte Eigenschaften der Objekte (Höhe, Breite der Linie, etc.) nicht zum Begriff der Funktion. Um die Entwicklung fehlerhafter Vorstellungen zu vermeiden, muss daher mit den Modelleigenschaften der Objekte reflektiert umgegangen werden.

Der beschriebene handlungsorientierte Zugang kann auch auf Funktionen zweier Variablen übertragen werden. So können mit der Handfläche als Tangentialebene 3D-gedruckte Modelle von Funktionen zweier Veränderlicher untersucht werden. 3D-gedruckte Modelle von Funktionsgraphen können damit für den langfristigen Aufbau eines tragfähigen Funktionsbegriffs auch über die Schulmathematik hinaus sorgen (vgl. Dilling & Witzke, 2018).

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehren In H. Bauersfeld, H. Bussmann & G. Krummheuer (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1-56). Köln: Aulis.

Bauersfeld, H. (2000). Radikaler Konstruktivismus, Interaktionismus und Mathematikunterricht. In E. Begemann (Hrsg.), *Lernen verstehen – Verstehen lernen. Zeitgemäße Einsichten für Lehrer und Eltern* (S. 117-145). Frankfurt am Main: Peter Lang.

Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht*, 25, 6–24.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie.* Berlin: Berlin.

Burscheid, H. J. & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktion: Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Dexheimer, M. (2014). Achterbahn-Experimente: Gegenständliche Modelle im Analysisunterricht. *Praxis Der Mathematik in Der Schule, 56*, 34–37.

Dilling, F. (2019). *Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Dilling, F. & Witzke, I. (2018). 3D-Printing-Technology in Mathematics Education – Examples from the Calculus. *Vietnam Journal of Education, 2*(5), 54-58.

Dresing, T. & Pehl, T. (2015). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Anleitungen und Regelsysteme für qualitative Forschung.* Marburg: Eigenverlag.

Fastermann, P. (2016). *3D-Drucken: Wie die generative Fertigungstechnik funktioniert.* Hildesheim, Berlin: Springer.

Gopnik, A. & Meltzoff, A.N. (1997). *Words, Thoughts and Theories.* Cambridge: MIT-Press.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Hahn, S. (2005). Kurven in der Diskussion: Lernende auf dem Weg zu einer vorstellungsorientierten Kurvendiskussion. *Praxis Der Mathematik in Der Schule, 47*, 26–31.

Hegedus, S. J. & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM Mathematics Education, 41*(4), 399–412.

Hoffkamp, A. (2009). Dynamisierter Repräsentationstransfer und Metavariation – Ein Ansatz zur Förderung funktionalen Denkens durch Computereinsatz. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 655-658). Münster: WTM-Verlag.

Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Labs, O. (2015). Aus abstrakter Mathematik wird Wirklichkeit. *Mathematik Lehren,* (193), 43–45.

Lindmeier, A. & Rach, S. (2015). 3D-Druck: Hands & minds on!: Von der räumlichen Konstruktion zum gedruckten Modell. *Mathematik Lehren*, (190), 18–21.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik Lehren,* (103), 8–11.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* Weinheim, Basel: Beltz.

Ng, O.-L. & Sinclair, N. (2018). Drawing in Space: Doing Mathematics with 3D Pens. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach & C. Vale (Hrsg.), *ICME-13 Monographs. Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education: Tools, Topics and Trends* (S. 301-313). Cham: Springer International Publishing.

Panorkou, N. & Pratt, D. (2016). Using Google SketchUp to Develop Students' Experiences of Dimension in Geometry. *Digital Experiences in Mathematics Education, 2,* 199–227.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Tall, D. (2010). Mathematical and emotional foundations for lesson study in mathematics. URL: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010c-lesson-study-chiang-mai.pdf.

Tiedemann, K. (2016). „Ich habe mir einfach die Rechenmaschine in meinen Kopf gebaut!" Zur Entwicklung fachsprachlicher Fähigkeiten bei Grundschulkindern. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 581-584). Münster: WTM-Verlag.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 10*(1), 3–37.

Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *13*(4), 345–364.

Vom Hofe, R. (1995). Vorschläge zur Öffnung normativer Grundvorstellungskonzepte für deskriptive Arbeitsweisen in der Mathematikdidaktik. In H.-G. Steiner & H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze* (S. 42-49). Köln: Aulis.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen.* Heidelberg: Spektrum.

Weth, T. (1995). Der Kurvenbegriff unter dem Einfluß von Unterrichtsreformen. In H.-G. Steiner & H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze* (S. 173-182). Köln: Aulis.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. Journal für Mathematik-Didaktik, *3*(3), 175-204.

Witzke, I. & Dilling, F. (2018). Vorschläge zum Einsatz der 3D-Druck-Technologie für den Analysisunterricht – Funktionen zum „Anfassen". In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 2011-2014). Münster: WTM-Verlag.

Witzke, I. & Hoffart, E. (2018). 3D-Drucker: Eine Idee für den Mathematikunterricht? In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 2015-2018). Münster: WTM-Verlag.

Witzke, I. & Spies, S. (2016). Domain-Specific Beliefs of School Calculus. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 131–161.

Witzke, I. (2014). Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes. *Der Mathematikunterricht*, *60*(2), 19–31.

Witzke, I. (2009). *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus: Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Anschrift der Verfasser

Frederik Dilling
Universität Siegen
Institut für Didaktik der Mathematik
Herrengarten 3
57072 Siegen
dilling@mathematik.uni-siegen.de

Felicitas Pielsticker
Universität Siegen
Institut für Didaktik der Mathematik
Herrengarten 3
57072 Siegen
pielsticker@mathematik.uni-siegen.de

Prof. Dr. Ingo Witzke
Universität Siegen
Institut für Didaktik der Mathematik
Herrengarten 3
57072 Siegen
witzke@mathematik.uni-siegen.de

Anhang

Oberkategorie (deduktiv)	*Unterkategorie (induktiv)*	*Ankerbeispiel*
1. Subjektive Erfahrungsbereiche	1.1 Pretest	Schüler C: Also, ja, bei diesem „Was ist eine Funktion?“ haben wir erstmal die Funktionsgleichung aufgeschrieben für die lineare und die quadratische Funktion. Dann haben wir noch dazu geschrieben, dass halt, äh, beide Funktionen in einem Koordinatensystem als Graph dargestellt werden können. (Interview 2)
	1.2 Graphendrucker	Schüler D: Wir haben einfach, ähm, wir haben als Beispiel eine Funktionsgleichung angegeben und das Programm hat uns halt die, äh, Funktionsgleichung in einen Graphen, beziehungsweise äh, in eine lineare oder quadratische Funktion angegeben. (Interview 2)
	1.3 3D-Objekte	Schüler B: Ähm, wir haben verschiedene Handlungen, wie beschrieben daran ausgeführt so (vollzieht die Handlungen erneut) und haben die halt ein bisschen uns angeguckt so, weil man die halt mal in 3D anfassen konnte anstatt immer ähm anstatt die halt nur zeichnerisch zu sehen. Und hat man die dann in 3D, konnte ein bisschen dran rumspielen, bisschen angucken so. (Interview 1)
	1.4 Stempeln	Schüler F: Stempelkissen bekommen und haben halt die Figuren, ja nicht Figuren, Körper in das Stempelkissen gedrückt und dann auf die Koordinatensysteme. (Interview 3)
	1.5 Zusammenhang der subjektiven Erfahrungsbereiche	Schüler D: Ähm. Also ähm ich\ ähm wir glauben halt, dass es, ähm, es ist halt eigentlich\ es ist das gleiche. Aber hier ist es halt, äh, wieder genauer in dem Koordinatensystem angegeben. Und hier ist es halt genau gedruckt worden. Es ist halt eigentlich alles das gleiche, ja. (Interview 2)
2. Kovariationsaspekt	2.1 Wahrnehmung der Änderung der Funktionswerte	Schüler B: Und dann sollte man halt mit dem Finger diese Parabel hier so abtasten und hat halt dabei dann gemerkt, je nachdem wie sich die Parabel halt verändert, dass zum Beispiel am Anfang ne geringere Steigung ist und dann der Finger zum Beispiel höher steigt schneller. (Interview 1)
	2.2 Vorstellungen zur Krümmung	Schüler B: […] Und wenn man mit der Hand das richtig macht, kann man halt richtig die Steigung erkennen, weil man irgendwann die Hand nicht mehr so biegen kann, zum Beispiel. […] Schüler B: Eigentlich nicht. (lacht) Also ich\ mit der Hand hat man halt mehr gemerkt, dass es wirklich die richtige Steigung ist, weil man das halt nicht so biegen kann. Also da hat man es auch gemerkt, nicht nur gesehen. Und mit dem Finger hat man es halt auch irgendwo gemerkt, dass man den halt auch in ner anderen Bewegung macht, aber nicht wirklich. (Interview 1)

Tab. 2: (wird auf der folgenden Seite fortgesetzt)

3. Objektaspekt	3.1 Symmetriebegründungen an den 3D-Objekten	Schüler F: Also der, äh, die Gerade ist punkt- und achsensymmetrisch. Also, äh, ich könnte jetzt das in der Mitte durchschneiden und einmal drehen und es wäre genau dasselbe. (Interview 3)
	3.2 Vorstellungen zu Kriterien für Extremstellen	Schüler B: Also das x Quadrat verändert ja immer die Steigung und dadurch fällt\ merkt man halt auch, dass es am Anfang zum Beispiel hier schneller fällt, dann langsamer fällt, also man weniger runterkommt, dann irgendwann am Scheitelpunkt am Wendepunkt ist und dann halt langsam und dann auf einmal wieder schneller hochgeht. (Interview 1)
	3.3 Verschiebung und Drehung	Schüler C: Also, ähm, bei der Geraden von der linearen Funktionsgleichung. Wenn ich es als Objekt habe, hängt es dann wieder davon ab, wie ich es halt drehe. Wenn ich es jetzt, sag ich mal, so drehe, hat es ne Steigung, aber, wenn ich es halt zum Beispiel so drehe, sinkt es halt (dreht jeweils das Modell). Deswegen hängt es bei der, äh, linea\ jetzt bei dem Graphen von der linearen Funktionsgleichung davon ab, wie man sie dreht. (Interview 2)
4. Referenzobjekte	4.1 3D-Objekte als Referenzobjekte	Schüler B: Und dann sollte man halt mit dem Finger diese Parabel hier so abtasten und hat halt dabei dann gemerkt, je nachdem wie sich die Parabel halt verändert, dass zum Beispiel am Anfang ne geringere Steigung ist und dann der Finger zum Beispiel höher steigt schneller. (Interview 1)
	4.2 Weitere Referenzobjekte	Schüler D: Ja, also das ist auch die, äh, bildliche Zeichnung. Nur halt, dass das wieder zweidimensional ist und man darauf halt wieder sehr gut die Punkte erkennen kann und die Gleichung wieder rauslesen kann und sich dann, ähm, vergleichen kann, ob man´s richtig gemacht hat oder nicht. Also das ist halt, ähm, in dem Fall (zeigt Modell) nicht so. Also natürlich ist es hier viel genauer. Man kann es auch an dem Koordinatensystem anlegen und, ähm, aber hier ist es halt anders (zeigt auf gestempeltes Bild). Man kann halt die ganzen Punkte ablesen. (Interview 2)

Tab. 2: (Fortsetzung) Vollständiges Kategoriensystem bestehend aus deduktiv gebildeten Oberkategorien und induktiv aus dem Material entnommenen Unterkategorien mit Definitionen und Ankerbeispielen