Empirische Zugänge zu Heurismen und geistiger Beweglichkeit in den Problemlöseprozessen von Fünft- und Sechstklässlern

BENJAMIN ROTT, KÖLN

***Zusammenfassung**: Der Einsatz von Heurismen gilt als ein wichtiger Aspekt beim (mathematischen) Problemlösen – die Theorie lässt daran keinen Zweifel. Doch wie lassen sich Heurismen in empirischen Prozessen identifizieren und wie hängen sie mit dem Ergebnis dieser Prozesse zusammen? Nach einer theoretischen Diskussion des Begriffs „Heurismus“ und seines Zusammenhangs mit „geistiger Beweglichkeit“ wird die Entwicklung eines Kodiermanuals zur validen und objektiven Identifikation von Heurismen in empirisch vorliegenden Problembearbeitungsprozessen von Studierenden vorgestellt. Anschließend werden der Einfluss von Heurismen auf die Problemlösebemühungen von Fünft- und Sechstklässlern untersucht. Die hierzu angeführten qualitativen Analysen von Problemlöseprozessen zeigen, dass einige Schülerinnen und Schüler (insbesondere erfolgreiche Teilnehmer mathematischer Wettbewerbe) weniger Heurismen als die übrigen Teilnehmer der Studie nutzen, um Probleme zu lösen. Eine mögliche Erklärung für diesen Befund ist eine höhere geistige Beweglichkeit dieser Schüler.*

***Schlagwörter:** Problemlösen, Heurismen, geistige Beweglichkeit*

***Abstract:** The use of heuristic techniques is considered to be an important aspect of (mathematical) problem solving – there are no theoretical doubts about that. But how can heuristics be identified in empirical processes and how do they correlate to success or failures in those processes? After a theoretical discussion of the term “heuristics” and its connection to mental flexibility, the development of a coding manual to identify heuristics in empirical processes validly and objectively using processes by university students is described. The goal is to analyze the influence of heuristics on the problem solving attempts of fifth and sixth graders as well as its relation to mental flexibility. Therefore, qualitative analyses of pupils’ problem solving processes are presented. Some of the successful pupils (especially successful participants of mathematical competitions) use less heuristics than the other participants of the study. A possible explanation for this result is a higher mental flexibility of those pupils.*

***Key Words:** Problem Solving, Heuristics, Mental Flexibility*

1. Einleitung

> *Ars Inveniendi* in the spirit of Descartes’ Method had been dormant for about a century […] when Pólya published *How to Solve It* in 1945, and the study of heuristic was indeed as good as forgotten. […] Once nearly forgotten, heuristics have now become nearly synonymous with mathematical problem solving. (Schoenfeld, 1985, S. 22 f.)

Unter *Problemlösen* wird in der Mathematikdidaktik in der Regel die Bearbeitung von Aufgaben verstanden, für die dem jeweiligen Bearbeiter[1] keine Verfahren oder Algorithmen bekannt sind, um den gegebenen Anfangszustand direkt in den gewünschten Endzustand zu transformieren; es gilt, eine Barriere zu überwinden (vgl. Schoenfeld, 1985; Rott, 2014a). Der Bearbeiter muss also mathematische Verfahren in für ihn neuer Art und Weise kombinieren oder subjektiv neue Verfahren entwickeln, um das Problem zu lösen (Winter, 1989). Beim Problemlösen spielen daher mathematische Kreativität und Intuition (als Leistung des Unbewussten, unmittelbar einsichtige Lösungsideen zu produzieren) eine wichtige Rolle (ebd., S. 170 ff.); für Lernende, die „i. a. keine kreativen Mathematikprofis sind“ (ebd., S. 178) können Heurismen eine Hilfe beim Problemlösen darstellen.

Die Bedeutung von *Heurismen* für das Problemlösen wird durch das Einstiegszitat betont; nach Schoenfeld (1985) bilden sie – neben *Ressourcen*, *Kontrolle* und *Beliefs* – eine von vier essentiellen Kategorien des Problemlösens. Zudem gehören „heuristische Fähigkeiten“ im Zusammenhang mit „Problemlösefähigkeiten“ zu den Winter’schen (1995, S. 37) Grunderfahrungen und sind daher – neben anderen Gründen (vgl. Zimmermann, 2003) – auch unter dem Aspekt des Erwerbs von Allgemeinbildung für den Mathematikunterricht in Schulen von hoher Relevanz (vgl. KMK, 2003).

Neben dieser Auffassung von Heurismen als erlernbare (mathematische) Methoden und Techniken, die Problemlöser unterstützen sollen (vgl. Bruder, 2000; Tietze, Klika & Wolpers, 2000), werden Heurismen teilweise auch als Kategorien zur Beschreibung von Problemlöseprozessen aufgefasst (vgl. Schoenfeld, 1992; Mousoulides & Sriraman, 2014). Schoenfeld (1992, S. 353 f.) beschreibt diese beiden Auffassungen von Heurismen pointiert als *präskriptiv* und *deskriptiv*. In diesem Artikel wird der Heurismenbegriff vorrangig deskriptiv verwendet.

Wie sich mathematische Intuition und der Einsatz von Heurismen (kursiv markiert) auf Problemlöseprozesse (im weiteren Verlauf dieses Artikels auch als „Prozesse“ bezeichnet) auswirken kann, wird im Folgenden veranschaulicht. Dabei wird zunächst ein intuitives Verständnis dieser Begriffe vorausgesetzt; im zweiten Kapitel werden sie dann ausgeschärft. Ausgewählt wurden zwei Paare von Fünftklässlern, die die sogenannte „Bierdeckel“-Aufgabe (s. Tabelle 1) erfolgreich bearbeitet haben:

Das erste Paar besteht aus Jana und Levin. Nach dem Lesen der Aufgabenstellung sagt Levin zunächst (00:35): „Kapier ich nicht.“ Jana äußert – mehr zu sich selbst als zu Levin –, man müsse wissen, wie groß die Bierdeckel sind. Dann erklärt sie Levin, was Bierdeckel seien: „diese Untersetzer“. Kurz darauf sagt Jana (01:00): „Oder sollen wir das in Brüchen schreiben? Das ist nämlich ein Viertel.“ Mit ihrem Stift deutet sie in der gegebenen Abbildung eine Unterteilung des Quadrats in vier Teile an. Levin ist noch nicht sofort überzeugt, er *misst* (01:20) zunächst die Seitenlängen eines Quadrats und verlängert anschließend (01:50) dessen Seiten (man könnte sagen, er führt Hilfslinien oder allgemeiner Hilfselemente ein), um die von Jana angedeutete Vierteilung sichtbar zu machen (siehe Abb. 1). Danach ist auch er zufrieden. Jana formuliert einen Antwortsatz, den sie Levin diktiert (siehe Abb. 1), und beide sind nach 06:10 min fertig mit der Aufgabe.

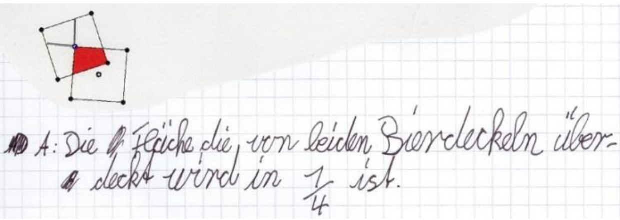


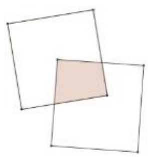
Abb. 1: Levins Hilfslinien und sein Antwortsatz zur „Bierdeckel“-Aufgabe

Barak und Pekalp bilden das zweite Paar. Beide lesen die Aufgabenstellung zweimal und klären gemeinsam, dass die farbig unterlegte Fläche zu untersuchen sei. Barak *misst* (01:52) die Seitenlängen des Quadrats, beide haben zunächst aber anscheinend keine Idee, wie der gesuchte Flächeninhalt zu ermitteln sei. Bei 03:50 berichtet Barak von einer *ähnlichen Aufgabe* aus der Schule, an die er sich erinnert: Er möchte den Flächeninhalt bestimmen, indem er kleine Quadrate in die gesuchte Fläche zeichnet und sie somit annähert. Diesen Ansatz verfolgt Barak etwa 10 Minuten lang, er kommt auf „8 kestchen [sic]“, weiß aber nicht, wie er dieses Ergebnis im Verhältnis zum vorgegebenen Quadrat ausdrücken soll. Pekalp weiß sich in dieser Zeit anders zu helfen: Zunächst (06:13) legt er einen Stift auf die Quadrate der Abbildung. Diesen Stift dreht er dann um den hervorgehobenen Mittelpunkt, um sich zu veranschaulichen, inwiefern die Quadrate gegeneinander beweglich sind. Nach dieser Aktion ruft er bei 06:30: „Ich weiß es, ist doch klar! […] ein Viertel.“ Kurz darauf (08:55) zeichnet er zwei Quadrate auf ein Papier (er fertigt eine Skizze bzw. eine *informative Figur* an), von denen er eines ausschneidet und anschließend um den Mittelpunkt des anderen dreht (er wechselt die Repräsentationsebene, was im Folgenden als *Transformationsprinzip* bezeichnet wird). Um sich weiter zu vergewissern, vor allem aber um Barak von seiner Idee zu überzeugen, zeichnet Pekalp danach (11:30) noch einen *Spezialfall*, bei dem die Seiten beider Quadrate parallel zueinander liegen, auf sein Blatt und beginnt dann mit dem Schreiben eines Antwortsatzes: „Es ist immer ¼.“ Nach 16:00 Minuten ist der Prozess beendet.

In diesen beiden Prozessen werden Unterschiede deutlich, die im Folgenden weiter untersucht werden: Während Jana nach sehr kurzer Zeit die Lösung der Aufgabe direkt „sieht“ und danach von ihr überzeugt ist, muss sich Pekalp (ebenso wie Levin) die Erkenntnis in einem mehrere Minuten dauernden Prozess „erarbeiten“. Im Gegensatz zu dem Prozess von Pekalp, bei dem heuristische Handlungen beobachtbar sind, lässt sich bei Janas Prozess nicht rekonstruieren, was in ihrem Kopf vorgegangen ist. Dieses Phänomen – eine Lösungsidee ohne beobachtbare Heurismen, die sie vorbereiten, – spielt im Folgenden eine wichtige Rolle. Ein im Schulkontext oft geäußertes Vorurteil lautet, dass Problemlösen nur etwas für die wirklich guten Schüler sei – womit dann vermutlich Lernende wie Jana gemeint sind. Das Beispiel von Pekalp zeigt aber, dass auch Schüler, die nicht sofort eine Lösung sehen, entsprechende Aufgaben erfolgreich bearbeiten können.

Zwei Bierdeckel

Die beiden unten stehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt.
Untersuche die Größe der Fläche, die von **beiden** Bierdeckeln überdeckt wird!



Tab. 1: Die „Bierdeckel“-Aufgabe

Mit Bezug auf das Konzept der geistigen Beweglichkeit nach Lompscher (1972) und Bruder (2003) lassen sich diese beiden Prozesse auch so deuten, dass sich Jana im oben skizzierten Prozess geistig beweglich zeigt: sie erkennt ohne weitere Hilfen und insbesondere ohne beobachtbare Handlungen die Größe der gesuchten Fläche. Pekalp ist – nach dieser Interpretation – in seiner Bearbeitung des Problems geistig nicht beweglich genug, um die Lösung sofort zu sehen. Diesen „Mangel" an geistiger Beweglichkeit kann er aber dadurch kompensieren, dass er heuristisch arbeitet: er veranschaulicht sich die möglichen Positionen der beiden Quadrate zueinander konkret mit einem Stift bzw. einem beweglichen Papierquadrat und vergewissert sich anschließend durch das Zeichnen eines Spezialfalls von der Korrektheit seiner Lösung.

Um solche Zusammenhänge zwischen geistiger Beweglichkeit und (– bei Mangel – ihrer Kompensation durch) Heurismen besser zu verstehen, erfolgt in diesem Artikel zunächst eine Klärung des Begriffs Heurismus im Zusammenhang mit geistiger Beweglichkeit. Anschließend wird ein (nach Mayring, 2008) induktiv-deduktiv entwickeltes Kodiermanual dargestellt, um Heurismen in Problemlöseprozessen interraterreliabel zu identifizieren und zu untersuchen. Abschließend wird diese Heurismen-Kodierung angewandt, um – wie in den obigen Beispielen – Prozesse von Fünft- und Sechstklässlern zu analysieren.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Geistige Beweglichkeit

Beim Problemlösen geht es darum, dass ein Problemlöser subjektiv neue Verfahren zur Lösung von Aufgaben finden oder bekannte Verfahren neu kombinieren muss (siehe Kapitel 1); der Problemlöser muss also geistig operieren, um zum gewünschten Zielzustand zu kommen. Lompscher (1972) beschreibt in seiner Theorie zur geistigen Tätigkeit und zur geistigen Entwicklung mehrere Operationen, die auch beim Problemlösen eine Rolle spielen: das Erfassen der Beziehungen von Teil und Ganzem, das Erfassen der Beziehungen von Objekt und Eigenschaft sowie das Vergleichen, Ordnen, Abstrahieren, Verallgemeinern, Klassifizieren und Konkretisieren. Die Qualität geistiger Tätigkeit wird nach Lompscher durch sogenannte Verlaufsqualitäten charakterisiert: „Verlaufsqualitäten sind […] das Ergebnis der Verfestigung und Verallgemeinerung von Komponenten des Verlaufs der geistigen Tätigkeit" (ebd., S. 34). Ohne Anspruch auf Vollständigkeit zählt Lompscher die folgenden fünf Verlaufsqualitäten auf: Beweglichkeit, Planmäßigkeit, Exaktheit, Selbständigkeit und Aktivität.

In diesem Zusammenhang stellt Lompscher (1972, S. 36) die *geistige Beweglichkeit* als „eine der wichtigsten Verlaufsqualitäten" heraus. Er beschreibt die folgenden Aspekte geistiger Beweglichkeit, die je nach Person unterschiedlich ausgeprägt sein können (vgl. hierzu auch Hasdorf, 1976):

> [Die geistige Beweglichkeit] äußert sich in dem Vermögen, mehr oder weniger leicht von einem Aspekt der Betrachtung zu einem anderen überzuwechseln beziehungsweise einen Sachverhalt oder eine Komponente in verschiedene Zusammenhänge einzubetten, die Relativität von Sachverhalten und Aussagen zu erfassen. Sie ermöglicht es, Beziehungen umzukehren, sich mehr oder weniger leicht und schnell auf neue Bedingungen der geistigen Tätigkeit einzustellen oder gleichzeitig mehrere Objekte oder Aspekte in der Tätigkeit zu beachten. (Lompscher, 1972, S. 36)

Sehr vergleichbar, wenn auch deutlich konkreter auf die Mathematik bezogen, sind die Komponenten mathematischer Fähigkeit, die Krutetskii (1976, S. 87 f.) als bedeutend für das Problemlösen bezeichnet. In diesem Katalog befinden sich u. a. die Fähigkeit zur Umkehrung mentaler Prozesse und gedankliche Flexibilität:

> Flexibility of thought – an ability to switch from one mental operation to another; freedom from the binding influence of the commonplace and the hackneyed. This characteristic of thinking is important for the creative work of a mathematician. (Krutetskii, 1976, S. 88)

Bruder (2000; 2003; siehe auch Bruder & Collet, 2011) hat diese Überlegungen – insbesondere die von Lompscher und Hasdorf – auf den mathematischen Kontext übertragen und vier Erscheinungsformen geistiger Beweglichkeit herausgearbeitet:

- *Reduktion* – Fokussierung auf das Wesentliche, Vereinfachen;
- *Reversibilität* – Umkehrung von Gedankengängen;
- *Aspektbeachtung* – gleichzeitiges Beachten mehrerer Aspekte, die Abhängigkeit von Dingen erkennen und gezielt variieren;
- *Aspektwechsel* – Wechsel von Annahmen oder Kriterien, Umstrukturieren eines Sachverhalts.

Die Begrifflichkeiten „geistig beweglicher" und „intuitiver Problemlöser" werden dabei synonym verwendet (z. B. Bruder & Collet, 2011, S. 36). Collet[2] (2009, S. 44) setzt zudem „die geistige Beweglichkeit von Schülern" mit „Kreativität beim Problemlösen" gleich. Greift man letzteren Gedanken auf, finden sich in der Kreativitätsforschung in der Tat Konzepte, die mit geistiger Beweglichkeit vergleichbar sind: Guilford (z. B. Guilford & Hoepfner, 1976) unterscheidet konvergentes und divergentes Denken. Zu letzterem gehören u. a. die folgenden drei Faktoren: (1) Ideenfluss (*fluency*) als die Geschwindigkeit, in der Ideen produziert werden, sowie die Geschwindigkeit des Zugriffs auf Basiswissen; (2) Flexibilität (*flexibility*) als die Fähigkeit, Ideen und Ansätze zu wechseln, ein Problem auf unterschiedliche Weisen anzugehen und verschiedenartige Lösungen zu finden, sowie (3) Originalität (*originality*) als die Fähigkeit, neue bis hin zu einzigartigen Ideen zu finden. Die Erscheinungsformen der geistigen Beweglichkeit lassen Überschneidungen insbesondere mit dem Faktor flexibility des divergenten Denkens erkennen.

2.2 Heurismen

Heurismus und *Heuristik* sind Begriffe, die in der wissenschaftlichen Literatur eine lange Tradition haben, aber nicht immer einheitlich verwendet werden. *Heuristik* soll hier im Sinne von Pólya (1949, S. 118 f.) für die Wissenschaft vom Problemlösen stehen, als „Name eines gewissen, nicht sehr deutlich abgegrenzten Wissenszweiges, der zur Logik, zur Philosophie oder zur Psychologie gehörte [mit dem Ziel], die Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung zu studieren." Mit *Heurismen* (bzw. *Heurismus* im Singular) sind einzelne heuristische Aktivitäten gemeint, die in anderen Veröffentlichungen teilweise auch als Heuristiken bezeichnet werden. In englischsprachigen Artikeln wird das Wort *heurism(s)* kaum verwendet und sowohl die einzelnen Aktivitäten als auch die Wissenschaft werden mit *heuristic(s)* oder *heuristic strategies* bezeichnet.

Nicht nur die Begriffe (Heuristik, Heurismus) werden nicht immer einheitlich verwendet, sondern auch ihre Bedeutung variiert in der Literatur; teilweise zwischen verschiedenen Wissenschaftszweigen wie der Mathematik, der Psychologie und der Informatik (insbesondere der Forschung zur künstlichen Intelligenz), teilweise aber auch innerhalb der Mathematikdidaktik (Rott, 2014b).

In seinem Wörterbuch der Heuristik beschreibt Pólya (1949, S. 155 f.) Heurismen als „insbesondere *die Denkoperationen*, die bei diesem Prozeß [dem Problemlösen] *in typischer Weise von Nutzen sind*." Als Beispiele führt er u. a. die Frage nach gegebenen und gesuchten Elementen, das Weglassen von Bedingungen, die Suche nach ähnlichen Aufgaben und das Überprüfen aller Schritte an. Ein solches allgemeines Verständnis von Heurismen, das sowohl kognitive als auch metakognitive Aktivitäten umfasst, wird u. a. auch von Tietze, Klika und Wolpers (2000) oder Koichu, Berman und Moore (2007) vertreten. Andere Autoren wie beispielsweise Schoenfeld (1985) oder Schukajlow und Leiss (2011) unterscheiden explizit zwischen kognitiven und metakognitiven Aktivitäten. Schoenfeld (1985, S. 23) umschreibt Heurismen als Faustregeln („rules of thumb") für erfolgreiches Problemlösen und als allgemeine Hinweise („general suggestions"), die dabei helfen, ein Problem besser zu verstehen oder Fortschritte auf dem Weg zu seiner Lösung zu machen. Schoenfeld listet Aktivitäten wie das Untersuchen von analogen oder ähnlichen Aufgaben, das Zeichnen von Figuren und Abbildungen oder Spezialisieren und Verallgemeinern als Beispiele für Heurismen auf. Planungs- und Kontrollaktivitäten gehören für Schoenfeld zu einer anderen Kategorie beim Problemlösen. Ähnliche Beispiele, wie bei Schoenfeld unter Ausschluss metakognitiver Aktivitäten, finden sich auch bei Bruder (2000).

Zudem gibt es Heurismen mit unterschiedlicher „Reichweite": sie können sehr eng abgesteckt und domänen- bzw. gebietsspezifisch sein – wie „Kürze zuerst alle Brüche" –, sie können aber auch – wie „Suche nach einer ähnlichen Aufgabe" – gebietsübergreifend einsetzbar sein (vgl. Schoenfeld, 1985, 1992; Koichu et al., 2007).

Abgegrenzt werden Heurismen – als Problemlösestrategien – von anderen Strategien, z. B. Lernstrategien. In vielen Begriffs(er)klärungen werden Heurismen auch von anderen mathematischen (Lösungs-) Verfahren wie Algorithmen unterschieden (z. B. Kantowski, 1974), wobei Kilpatrick (1967, S. 19) darauf hinweist, dass Heurismen und Algorithmen (insbesondere in empirischen Untersuchungen) nicht immer sauber getrennt werden könnten. Relevant sei, dass der Einsatz von Heurismen – im Gegensatz zum Einsatz von standardisierten mathematischen Verfahren – keine Lösung garantiere (vgl. Bruder, 2000; Wilson et al., 1993).

Auch wenn Pólya (1949) – wie sehr viele Autoren nach ihm – seine Liste von Heurismen mit der Absicht verfasst hat, Problemlösern zu helfen, wurde in vielen Studien festgestellt, dass Heurismentrainings in der Regel wenig erfolgreich sind (vgl. Schoenfeld, 1992). Schoenfeld (ebd.) zeigt am Beispiel des Heurismus „Betrachten von Spezialfällen" und drei verschiedenen Problemen einen möglichen Grund für diese Befunde: Die skizzierten Lösungswege zu den drei Problemen verlaufen so unterschiedlich, dass der Tipp „Nutze Spezialfälle!" – *präskriptiv* – einem Problemlöser kaum und v. a. nicht bei allen drei Problemen geholfen hätte. Erst in einer Rückschau – *deskriptiv* – erkennt man, dass im Prinzip alle drei Lösungswege auf die eine oder andere Art die Betrachtung von Spezialfällen enthalten. Allgemeiner formuliert kann man sagen, dass die in der Literatur verbreiteten – und insbesondere die von Pólya recht allgemein formulierten – Heurismen eher dazu geeignet sind, Problemlöseaktivitäten in einer a posteriori-Analyse zu erfassen, als dass sie a priori genutzt werden könnten, um Problemlösern effektiv zu helfen (vgl. die Einleitung). In diesem Sinn sind auch die Heurismen in den Problemlöseprozessen zu verstehen, die in der Einleitung und später im Ergebnisteil beschrieben werden: sie dienen hier der Beschreibung und Analyse von Prozessen. Diese Entscheidung bedeutet nicht, dass die präskriptive Nutzung bzw. Deutung von Heurismen abgelehnt wird; sie ist nur für diesen Artikel nicht relevant, da kein Heurismentraining beschrieben und diskutiert wird.

2.3 Die Kategorisierung von Heurismen

Um Heurismen besser verstehen zu können und sie für eine empirische Erfassung aufzubereiten, werden nachfolgend verschiedene Möglichkeiten für Kategorisierungen beschrieben und miteinander verglichen. Auf Kategorisierungen aus der Psychologie soll hier nur am Rande eingegangen werden, da die entsprechenden Heurismen für die in dieser Studie diskutierten Probleme wenig relevant sind; eine gute Übersicht findet sich beispielsweise bei Dunbar (1998): Am Beispiel von „Problemen" wie Tic-Tac-Toe, dem Turm von Hanoi oder Dunckers Bestrahlungsproblem werden Heurismen erläutert wie der Bergsteigeralgorithmus (*hill climbing*: die Suche nach möglichst guten Lösungen durch schrittweise Variation von Elementen einer vorhandenen Lösung) oder die Ziel-Mittel-Analyse (*means-ends-analysis*: die Untergliederung des Problems durch Teilziele).

In der Mathematik und der Mathematikdidaktik finden sich prinzipiell drei unterschiedliche Gruppierungen von Heurismen: (1) nach ihrer Nützlichkeit oder Trainierbarkeit, (2) nach inhaltlicher Ähnlichkeit und (3) nach ihrer Reichweite in Bezug auf die Gestaltung von Problemlöseprozessen:

(1) Viele Bücher, die sich dem Problemlösen widmen – insbesondere solche, die aus Wettbewerbskontexten erwachsen sind bzw. ein Training für mathematische Wettbewerbe anbieten –, gehen ausführlich auf Heurismen ein. In der Regel werden für die entsprechenden Wettbewerbe die „*nützlichen*" bzw. „erfolgreichen" Problemlösestrategien und die favorisierten Heurismen der Autoren im Zusammenhang mit passenden Aufgaben präsentiert; siehe z. B. Sewerin (1979) oder Engel (1998). Teilweise sind entsprechende Sammlungen auch nach einem ihnen zugrunde liegenden Lehrkonzept sortiert.

(2) Eine Zusammenfassung von Heurismen nach *inhaltlichen Kriterien* und „gemeinsamen Merkmalen" hat beispielsweise Schreiber (2002, 2011) vorgeschlagen. Er bezieht sich dabei stark auf die Schriften Pólyas, dessen Überlegungen er zusammenfasst und teilweise neu sortiert. Seine Zusammenstellung umfasst vier Kategorien, für die er jeweils mehrere Beispiele anführt: Heurismen der Induktion (u. a. „Probiere systematisch", „Arbeite vorwärts"), der Variation („Variiere das Gegebene", „Variiere den Allgemeinheitsgrad"), der Interpretation („Verfertige ein Modell", „Suche ein Analogon") sowie der Reduktion („Unterscheide Fälle", „Arbeite rückwärts"). Auf den Ausarbeitungen Schreibers basiert auch die Systematik von Schwarz (2006), der eine Gliederung in „Heurismen der Variation, der Induktion und der Reduktion" vorschlägt und sehr ausführlich darstellt.

(3) Schließlich gibt es noch Vorschläge, Heurismen grob nach ihrer *Reichweite* bzw. danach zu unterteilen, wie sehr sie sich auf Teile oder den gesamten Prozess des Problemlösens auswirken. Tietze, Klika und Wolpers (2000, S. 98 ff.) vertreten eine Unterscheidung von „globalen und lokalen Heuristiken". Globale Heurismen beziehen sich auf den Problemlöseprozess in seiner Gesamtheit und seine Organisation, beispielsweise eine übergreifende Planung, eine Zerlegung des Prozesses in Phasen (wie die vier Phasen nach Pólya, 1949) oder das Vorwärtsarbeiten vom Gegebenen zum Gesuchten bzw. das Rückwärtsarbeiten in der anderen Richtung. Die globalen Heurismen enthalten damit also auch metakognitive bzw. selbstregulative Elemente, die im vorliegenden Artikel nicht weiter berücksichtigt werden sollen (Gründe hierfür werden weiter unten diskutiert). Als Beispiele für lokale Heurismen geben Tietze und Kollegen die Suche nach Spezialfällen und analogen Aufgaben an; das Spezialisieren und der Einsatz verschiedener Repräsentationsmöglichkeiten gehören ebenso dazu wie das Zerlegen eines Problems in Teilfragen. Gerade bei letzterem Beispiel kann man sich sicherlich fragen, inwiefern dies lokal oder global zu verstehen ist; Tietze und Kollegen (2000, S. 102) merken dazu selbst an, dass die Einteilung in Kategorien grob ist und es zwischen den verschiedenen Heurismen Unschärfen und Überschneidungen gebe.

Eine zweite, oft zitierte Kategorisierung von Heurismen (z. B. in den Bildungsstandards KMK, 2003) nach ihrer Reichweite stellt ihre Einteilung in „Hilfsmittel, Prinzipien und Strategien" dar, die von König (1992) und Bruder (2000) bekannt gemacht wurde und – soweit sich das zurückverfolgen lässt – auf Sewerin (1979) zurückgeht. *Heuristische Hilfsmittel* sind „[i]m Gegensatz zu den anderen Heurismen, die eher Verfahrenscharakter haben, [...] keine unmittelbaren Lösungsstrategien“ (Bruder & Collet, 2011, S. 45). Sie dienen hauptsächlich dazu, Probleme zu verstehen und zu strukturieren bzw. Informationen zu reduzieren (vgl. ebd.); Beispiele für Hilfsmittel sind Tabellen, Lösungsgraphen und Skizzen. Der Unterschied zwischen Strategien und Prinzipien ist weitgehend vergleichbar mit der oben geschilderten Unterteilung in globale und lokale Heurismen: Die *heuristischen Strategien* – nach Bruder (2000, S. 72 f.) gehören Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten sowie das Systematische Probieren dazu – zielen stärker auf die Entwicklung eines Lösungsplanes ab. Bruder und Collet (2011, S. 68) umschreiben die Strategien als „[...] grundsätzliche Vorgehensweisen [...] wie man in einer Problemsituation agieren kann, wenn das Problem im Wesentlichen verstanden wurde.“ Sie weisen darauf hin, dass sie „keinerlei algorithmische Natur“ besäßen, sondern eher „wie ein Treppengeländer Orientierung bieten“ würden (ebd.). Bei *heuristischen Prinzipien* handelt es sich eher um „konkrete Hilfestellungen“, die teilweise problem- oder gebietsspezifisch sind und eher dem Finden von Lösungsideen dienen. Die Prinzipien „beschreiben solche Vorgehensweisen, die mit den Beweglichkeitsqualitäten des Denkens Aspektwechsel und Aspektbeachtung korrespondieren.“ (ebd., S. 87) Im Vergleich zu den Strategien sind sie stärker an Fachinhalte gebunden (ebd.). Unter anderem zählen hierzu das Analogie-, das Transformations- und das Extremalprinzip sowie das Arbeiten mit Spezialfällen (vgl. Tabellen 3 – 5 im Anhang).

Auch die Kategorisierung von Heurismen nach Bruder in Hilfsmittel, Prinzipien und Strategien ist nicht eindeutig und trennscharf: Weder lassen sich die Heurismen untereinander immer deutlich voneinander abgrenzen, noch sind die Kategorien immer korrekte Umschreibungen, was die Reichweite der Heurismen anbelangt. Beispielsweise können Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten auch sehr lokal eingesetzt werden und ein Anwenden des Analogieprinzips kann – global gesehen – den gesamten Prozessverlauf bestimmen. Die vorgestellten Kategorien ermöglichen aber zumindest eine praktikable Unterscheidung von Heurismen, die in Lehre und Forschung die Kommunikation über und die Arbeit mit Heurismen unterstützen kann. Im empirischen Teil dieses Artikels wird auf die Bruder’sche Kategorisierung von Heurismen Bezug genommen.

2.4 Das Zusammenspiel von geistiger Beweglichkeit und Heurismen

Van der Waerden (1973) hat sich intensiv mit den Überlegungen Poincarés und Hadamards zur Inkubation und Illumination auseinandergesetzt und erörtert, inwiefern gezielte Überlegungen einen Einfall vorbereiten können. Mithilfe des Satzes des Archimedes über Kugel und Kreiszylinder argumentiert er, inwiefern das Zurückgehen auf ähnliche Probleme und das Betrachten bestimmter Situationen eine Lösung vorbereiten könne:

> Man könnte schließlich einwenden: „Ja, aber ohne Einfall nützt das alles nichts!“
>
> Der Einwand ist berechtigt, aber mir scheint doch, dass die bewusste Überlegung den Einfall vorbereitet. Das bewusste Denken setzt die Vorstellungen in der richtigen Weise in Bewegung; es steckt ein Ziel und gibt die Richtung an. Wenn das Problem richtig angesetzt ist und man die richtigen Analogien zu bereits gelösten Problemen heranzieht, so genügt oft ein ganz kleiner Einfall. (von der Waerden, 1973, S. 6)

Ähnliche Überlegungen, Fortschritte beim Problemlösen zu ermöglichen, gehen in der mathematikdidaktischen Forschung auf Pólya zurück. Pólya hat zunächst aus der Perspektive des Mathematikers (Pólya & Szegö, 1925) und später auf der Basis seiner Erfahrung als Ausbilder von Studierenden und Lehrern (u. a. Pólya, 1949) zur Heuristik umfangreich publiziert. Dabei hat er an Beispielen ausführlich erläutert, inwiefern Heurismen bei der Lösung von Problemen helfen können bzw. dies historisch getan haben. Große Bekanntheit erlangte in diesem Zusammenhang Pólyas (1949, Einband) „Tabelle“, in der er den Prozess des Problemlösens in vier Phasen ((1) Verstehen der Aufgabe, (2) Ausdenken eines Planes, (3) Ausführen des Plans und (4) Rückschau) einteilt und jeder Phase Hinweise und Fragen zuordnet, die zu großen Teilen als heuristisch, teilweise aber auch als metakognitiv gelten können. Beispiele für diese Fragen und Hinweise sind u. a. „Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Zeichne eine Figur! Kennst Du eine verwandte Aufgabe? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Hast Du alle Daten benutzt? Kontrolliere jeden Schritt.“

Im Zusammenhang von Ideen und Heurismen bezieht sich König (1992) auf Lompschers Begriff der geistigen Beweglichkeit und betont ihre Bedeutung für das Problemlösen. Er ergänzt, dass sie bei verschiedenen Personen unterschiedlich ausgeprägt sein kann, betont aber, dass sich „fehlende Intuition oder mangelnde geistige Beweglichkeit durch Einsatz heuristischer Vorgehensweisen teilweise kompensieren [lässt]“ (ebd., S. 24). Vergleichbares beschreiben Winter (1989, S. 175, 190 ff.), der diskutiert, inwiefern der Einsatz von Heurismen divergentes Denken (nach Guilford) unterstützen könne, oder Tietze et al. (2000, S. 102), die Heurismen als „Anregungen für kreatives Verhalten“ umschreiben.

Bruder (2000, S. 73) greift diese Diskussion auf und beschreibt – mit Bezug auf Lompscher – den Zusammenhang geistiger Tätigkeit und Heurismen wie folgt: „Heuristische Bildung versteht sich […] als Mittler zur teilweisen Kompensation weniger gut ausgeprägter geistiger Beweglichkeit über eine höhere Ziel- und Methodenbewusstheit.“ Sie (ebd.) hat eine Liste heuristischer Vorgehensweisen – sortiert nach den oben genannten Erscheinungsformen – zusammengestellt, die in besonderer Weise dazu geeignet sind, einen Mangel an geistiger Beweglichkeit zu kompensieren (vgl. Collet, 2009, S. 62): *Reduktion* – informative Figur, Tabelle, Gleichung; *Reversibilität* – Rückwärtsarbeiten; *Aspektbeachtung* – Invarianzprinzip, Extremalprinzip, Symmetrieprinzip, Fallunterscheidung, Systematisches Probieren; *Aspektwechsel* – kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Transformationsprinzip, Zerlegungsprinzip, Ergänzungsprinzip.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass geistige Beweglichkeit (im Sinne von Lompscher, König und Bruder) eng verbunden ist mit mathematischer Intuition und Kreativität und entscheidend zum Erfolg beim Problemlösen beitragen kann. Ein Mangel an geistiger Beweglichkeit kann durch den Einsatz von Heurismen – im Sinne von van der Waerden als „bewusste Überlegung“ – kompensiert werden.

Diese Diskussion um geistige Beweglichkeit und Heurismen, um unbewusstes und bewusstes Denken (Hadamard, 1945) bzw. um Einfall und Überlegung (van der Waerden, 1973) lässt sich auch im Rahmen der *Dual Process Theory* interpretieren (vgl. Tirosh & Tsamir, 2014; Metz-Göckel, 2011): Im Rahmen dieser Theorie werden unbewusstes, schnelles, intuitives (System 1) und bewusstes, langsames, anstrengendes (System 2) Denken voneinander unterschieden (siehe insbesondere Kahneman, 2012). Die geistige Beweglichkeit, das flexible Wechseln von Ansätzen und das unbewusste Durchprobieren verschiedener Ansätze, das zu intuitiven Ideen führt (letzteres insbesondere von Hadamard, 1945, beschrieben), spielen sich im System 1 ab. Heurismen, wie Pólya sie beschrieben hat, werden dagegen bewusst (System 2) eingesetzt (Kahneman, 2012, S. 98). Dies wird auch daran deutlich, dass beispielsweise Winter (1989, S. 35) in diesem Zusammenhang vom „methodischen Lösen von Problemen“ spricht und es sich für Koichu und Kollegen (2007, S. 101) um einen „systematic approach“ handelt. Autoren wie Schoenfeld (1985) und Wilson, Fernandez und Hadaway (1993) betonen, dass Heurismen in Problemlöseprozessen bewusst ausgewählt und überprüft werden müssen. Um Missverständnissen vorzubeugen: Mit einem „bewussten Einsatz von Heurismen“ ist hier lediglich die Unterscheidung zum unbewussten System 1-Denken gemeint; es soll nicht behauptet werden, dass beispielsweise Pekalp aus dem zweiten Beispiel in der Einleitung bewusst dafür entschieden hätte, den Heurismus *Spezialfall* einzusetzen – es ist eher wahrscheinlich, dass ihm dieser Heurismus nicht explizit geläufig war.

2.5 Forschungsstand zu Heurismen und ihrer empirischen Erfassung

Wie in der Einleitung angekündigt, geht es in diesem Artikel u. a. um eine Identifikation von Heurismen. Zur Vorbereitung einer empirischen Studie zum Heurismeneinsatz beim Problemlösen wird nun ein Überblick über entsprechende Forschung gegeben. Hierbei geht es weniger um die Bemühungen, Heurismentrainings zu konzipieren und zu vergleichen (für Übersichten hierzu siehe Lester, 1994; Schoenfeld, 1992), stattdessen werden Studien betrachtet, in denen allgemein der Einsatz von Heurismen und sein Zusammenhang zum Erfolg beim Problemlösen sowie geistige Beweglichkeit im Vordergrund stehen. Die hier vorgestellten Studien decken das Spektrum ab von reinen Auswertungen von Produkten (bzw. schriftlichen Dokumenten) über die Analyse von Prozessen anhand von Tonaufzeichnungen bis hin zu Videoaufnahmen. Zugleich wird ein Augenmerk auf verschiedene Verfahren zur Kodierung von Heurismen in Prozessen und entsprechende Kodieranweisungen gelegt.

Eine der ersten empirischen Untersuchungen von Problembearbeitungsprozessen – noch vor der Verbreitung von Videokameras – stammt von Kilpatrick (1967). In aufgabenbasierten Interviews hat Kilpatrick die Problemlöseprozesse von 56 Achtklässlern analysiert. Seine Methodik fand dann auch in den Dissertationen von Lucas (1974) mit Studienanfängern und Kantowski (1974) mit Neuntklässlern Verwendung. In allen drei Studien konnte eine schwache bis mittelstarke Korrelation zwischen dem Einsatz von Heurismen und dem Erfolg beim Problemlösen nachgewiesen werden. Der Ansatz von Kilpatrick (1967) bestand darin, unter Pólyas Anleitung dessen Tabelle als „Checkliste“ zu verwenden und abzuhaken, welche Heurismen in den beobachteten und per Tonband aufgenommenen Prozessen vorkamen. Nachdem er festgestellt hatte, dass sich Pólyas Tabelle nicht direkt für die Prozessanalyse eignet, entwickelte Kilpatrick auf der Basis dieser Tabelle ein feinschrittiges System mit dem Handlungen, Fehler und Schwierigkeiten kodiert werden können. In der Handhabung dieses Instruments gab es bei Kilpatrick – ebenso wie bei Lucas (1974) und Kantowski (1974) – allerdings Schwierigkeiten mit der objektiven Kodierung der Daten: Kilpatrick (1967, S. 55 ff.) entfernte den Großteil der Items seiner überarbeiteten Checkliste wegen zu geringer Interraterübereinstimmung. Auch Lucas strich viele seiner Variablen wegen zu geringer Übereinstimmung mit einem zweiten Kodierer aus den Analysen. Kantowski hat ihre Daten alleine kodiert und die Interraterübereinstimmung nicht bestimmt. Übrig blieben bei Kilpatrick nur wenige Items (beispielsweise „Trial-and-error processes“ oder „Checking solutions“, ebd., S. 50 ff.), die in die Auswertung einbezogen wurden. Von diesen Items bezieht sich knapp die Hälfte auf metakognitive Tätigkeiten wie die Kontrolle von Teilschritten und des Ergebnisses und auf die Planung des Prozesses.

Im deutschsprachigen Raum hat beispielsweise Stein (1996) gezeigt, dass schon Grundschüler bei der Arbeit an (teilweise unlösbaren) Aufgaben aus der Geometrie und Arithmetik über viele wichtige Problemlösetechniken wie z. B. Vorwärtsarbeiten und Backtracking verfügen. Stein (1996) hat die Aufzeichnungen der von ihm beobachteten Prozesse „im Team im Sinne konsensueller Validierung im Interpretenkreis nach Maier (1991)“ (ebd., S. 130) mit Examenskandidaten ausgewertet. Dabei (ebd., S. 124) weist er ausdrücklich auf die Schwierigkeiten solcher Interpretationen hin, z. B. dass bestimmten auffälligen Mustern im Verhalten von Schülern nicht immer eine bewusste „strategische Absicht“ zugrunde liegen müsse. Aus diesem Grund unterscheidet er Strategien von „Strategiekeimen“. Letztere könnten von den Schülern zu Strategien weiterentwickelt werden.

Collet (2009) hat bei Siebt- und Achtklässlern von neun Schulen das Auftreten von Heurismen analysiert: In schriftlichen Leistungstest, die neben Multiple-Choice-Items auch Probleme mit einem offenen Aufgabenformat enthielten, wurde der Heurismeneinsatz bei zwölf Aufgaben erhoben; beispielsweise wurden Tabellen und Gleichungen gezählt. In den Vortests setzten die Schüler im Durchschnitt ca. zwei Heurismen im gesamten Test ein. Der Einfluss der Heurismen auf die erzielte Leistung wurde mithilfe von Korrelationen bestimmt: Es zeigten sich hochsignifikante Korrelationen für die 7. Klasse von $r = .48$ und für die 8. Klasse von $r = .45$. Hierzu wurden allerdings keine Prozesse, sondern lediglich die Produkte der Problemlösebemühungen ausgewertet.

Zu den hier relevanten Ergebnissen aus der Studie von Collet kommt noch ein zweiter Aspekt hinzu: Nach einer umfangreichen Fortbildung der Lehrkräfte und entsprechenden Änderungen des Unterrichts in Bezug auf Problemlösen und Selbstregulation, was mit Beobachtungsbögen sichergestellt wurde, wurden die Schüler erneut getestet. Im Nachtest stieg die Anzahl der eingesetzten Heurismen, gemittelt über zwölf ausgewertete Aufgaben, auf ca. sechs; die Korrelation zwischen dem Heurismeneinsatz und dem Testergebnis stieg auf $r = .73$ für die 7. Klasse und auf $r = .58$ für die 8. Klasse. Der engere Zusammenhang im Nachtest wurde von Collet so interpretiert, dass die Schüler die Heurismen nach dem Training erfolgreicher zum Lösen der Probleme einsetzten (ebd., S. 191). Darüber hinaus hebt Collet als Ergebnis ihrer Studie hervor, das Wirkprinzip heuristischer Bildung – die Kompensation mangelnder geistiger Beweglichkeit durch den Einsatz von Heurismen – nachgewiesen zu haben:

> Mithilfe der durch die Lehrkräfte dokumentierten Unterrichtsstunden wurde im Rahmen dieser Arbeit das *Wirkprinzip heuristischer Bildung* nach Bruder (1993, 2002, 2003a) erstmals empirisch bestätigt. Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass geistige Beweglichkeit, die im Anwenden heuristischer Vorgehensweisen erfasst wurde, durch eine Vermittlung heuristischer Vorgehensweisen im Mathematikunterricht unter Kontrolle des Klassenleistungsniveaus gefördert werden kann. (Collet, 2009, S. 267)

Koichu, Berman und Moore (2007) haben zwei 8. Klassen über einen Zeitraum von fünf Monaten heuristisch trainiert. In schriftlichen Vor- und Nachtests (der Scholastic Aptitute Test (SAT)) von 37 Schülern wurde die mathematische Leistung erhoben, die nach dem Training signifikant höher lag als davor, wobei die leistungsschwachen Schüler stärker profitieren konnten als die leistungsstarken. Zwölf dieser Schüler haben zusätzlich an aufgabenbasierten Interviews zu drei Zeitpunkten (zu Beginn, in der Mitte und am Ende des Trainings) teilgenommen, in denen v. a. der Heurismeneinsatz ausgewertet wurde. Bei elf dieser zwölf Schüler stieg die Anzahl der kodierten Heurismen von Interview zu Interview, beim zwölften Schüler blieb die Anzahl konstant. Koichu und Kollegen interpretieren ihre Ergebnisse so, dass Erfolg beim Bearbeiten mathematischer Probleme mit der Fähigkeit, Heurismen einzusetzen, korreliert ist. Koichu, Berman und Moore haben für die Auswertung ihrer Interviews ein ausführliches Kodiermanual zur Identifikation von Heurismen entwickelt, das eine verlässliche (Interrater-Übereinstimmung 84 % in einem Testinterview) und valide (konsensuelle Validierung mit dem Probanden) Analyse ermöglicht. Allerdings enthält dieses Manual einerseits nur spezielle Heurismen – passend zu den in der Studie analysierten Aufgaben – und andererseits metakognitive Aktivitäten, die in der hier vorliegenden Studie nicht erfasst werden sollen.

Forschung zu geistiger Beweglichkeit beim mathematischen Problemlösen gibt es – mit der oben beschriebenen Ausnahme (Collet, 2009) – kaum. Psychologische Forschungsprojekte, in denen der Einfluss von Intuition oder Inkubationszeit (bzw. System 1) untersucht wird, beschränken sich in der Regel auf assoziative Anforderungen (z. B. das

Nennen möglichst vieler Verwendungen für einen Ziegelstein entweder sofort, nach drei Minuten Bedenkzeit oder nach drei Minuten, in denen die Aufmerksamkeit durch Rückwärtszählen o. ä. gebunden wurde), die mit dem Lösen anspruchsvoller mathematischer Probleme wenig zu tun haben (siehe Metz-Göckel, 2011, für einen Überblick).

2.6 Forschungsziel und -frage

Aus dem bisherigen Forschungsstand ergibt sich das folgende Bild: Heurismen leisten einen wichtigen Beitrag zu erfolgreichem Problemlösen. Wie dieser Effekt genau aussieht und wie Heurismen mit geistiger Beweglichkeit zusammenhängen, ist jedoch noch unsicher. Bislang gibt es im deutschsprachigen Raum lediglich die Studie von Collet (2009), in der das Wirkprinzip heuristischer Bildung nach Bruder – mit quantitativen Methoden – untersucht wurde. Widersprüchlich an dieser Studie ist in meinen Augen der Gebrauch von Heurismen: Einerseits wird postuliert, dass durch das Erlernen von Heurismen mangelnde geistige Beweglichkeit kompensiert werden könne, um zu vergleichbaren Ergebnissen beim Problemlösen zu kommen (ebd., S. 52) – geistig bewegliche Schüler sollten also weniger Heurismen verwenden als ähnlich gute aber geistig weniger bewegliche Schüler. Andererseits wurde „[d]ie Anzahl der im Test verwendeten Heurismen […] als Indiz für die geistige Beweglichkeit eines Schülers […] angesehen“ (ebd., S. 125) – geistig bewegliche Schüler verwenden nach dieser Operationalisierung also mehr Heurismen als geistig weniger bewegliche Schüler.

Collet fordert am Ende ihrer Arbeit, dass die Zusammenhänge von geistiger Beweglichkeit und Heurismen weiter untersucht werden müssten. Ein erster Schritt hierzu sei die Frage, „ob heuristische Vorgehensweisen von Ratern übereinstimmend eingeschätzt werden können“ (Collet, 2009, S. 275). Die Messmethodik zur Analyse eingesetzter Strategien müsse weiterentwickelt werden und auf Prozesse (z. B. Interviews) im Gegensatz zu Produkten ausgedehnt werden (ebd.). Die in Abschnitt 2.5 vorgestellte Analyse des Forschungsstands zeigt, dass es bislang kein entsprechendes Verfahren gibt, um Heurismen im Zusammenhang mit geistiger Beweglichkeit in Prozessen valide und reliabel zu erfassen. Das hier vorgestellte (methodische) **Forschungsziel** ist daher die Entwicklung eines Kodierverfahrens, mit dem Heurismen in Problembearbeitungsprozessen von Lernenden (zuverlässig) identifiziert werden können. Die Entwicklung dieses Kodierverfahrens wird in Kapitel 3 beschrieben.

Anschließend soll mithilfe dieses Kodierverfahrens der Zusammenhang von geistiger Beweglichkeit und Heurismen untersucht werden. Ausgewählt wurden hierfür Fünft- und Sechstklässler, da die Gruppe der jüngeren Lernenden bisher nur wenig erforscht ist (Heinze, 2007) und in den meisten Studien mit älteren Schülern oder Studierenden gearbeitet wurde. Die Untersuchungen von Stein (1996) und anderen deuten aber darauf hin, dass auch Schüler der Primarstufe und der Jahrgänge 5/6 beim Problemlösen heuristisch tätig sein können. Aus der Perspektive der Entwicklungspsychologie lässt sich schließen, dass bereits Schüler dieser Altersstufe aufgrund sich entwickelnder metakognitiver Fähigkeiten (Piaget, 1972; Schreblowski & Hasselhorn, 2006) bewusst Heurismen einsetzen können. Aus diesen Vorüberlegungen ergibt sich die folgende **Forschungsfrage**: In welchem Zusammenhang stehen geistige Beweglichkeit und der Einsatz von Heurismen bei Schülern zu Beginn der Sekundarstufe I? Dieser Frage wird in Kapitel 4 dieses Artikels nachgegangen.

3. Empirische Erfassung von Heurismen

3.1 Zur Identifikation von Heurismen

Theoretische Analysen (z. B. Schoenfeld, 1992, am Beispiel des Heurismus „Spezialfall betrachten“) zeigen, dass Heurismen – im Sinne empirischer Forschung hier verstanden als beobachtbare bzw. rekonstruierbare Aktivitäten in einem Problemlöseprozess – in verschiedenen mathematischen Gebieten sehr unterschiedliche Ausprägungen haben können, ja sogar aufgabenspezifische Gestalt annehmen. Die exemplarische Übersicht über verschiedene Heurismen-Kodierverfahren (Abschnitt 2.5) bestätigt, dass je nach theoretischem Hintergrund der jeweiligen Studie und den verwendeten Problemen unterschiedliche Kodiermanuale Verwendung finden. Für die in Deutschland verbreitete Heurismen-Kategorisierung nach Bruder und Collet (2011, siehe Abschnitt 2.3) gibt es bislang kein Kodierverfahren, das Prozesse berücksichtigt. Daher soll ein entsprechendes Verfahren entwickelt werden.

Aus mehreren Gründen ist zu erwarten, dass der Heurismeneinsatz in videographierten Prozessen aussagekräftiger für die jeweiligen Prozesse ist als die ausschließliche Auswertung der zugehörigen Produkte: Beispielsweise werden beim Problemlösen i. d. R. nicht alle Ideen verschriftlicht, so dass in einer reinen Produktkodierung weniger Heurismen identifiziert werden können. Auch lassen sich die zugrundeliegenden Gedanken aus einem Aufschrieb schlechter rekonstruieren als aus der Kombination von Aufschrieb und Gesagtem; vermeintlich unzusammenhängende Beispiele könnten mit dem Wissen um den zugehörigen Prozess eine dahinter liegende Systematik offenbaren. Daher kommen Kodiermanuale für Produkte, wie das von Collet (2009), hier nicht in Frage.

Von den analysierten Verfahren verspricht der Ansatz von Koichu und Kollegen (2007) im Hinblick auf eine valide und objektive Kodierung von videographierten Prozessen den größten Erfolg. Inhaltlich kann deren Kodiermanual allerdings nicht direkt übernommen werden: Einerseits passen die dortigen Operationalisierungen nicht zu den hier verwendeten Problemen (s. Tabelle 2) – was sich durch die Ergänzung aufgabenspezifischer Operationalisierungen leicht beheben lässt. Andererseits schließt das Verfahren von Koichu (wie das von Kilpatrick) metakognitive Aktivitäten ein, die in der Kategorisierung von Bruder und Collet (2011) nicht enthalten sind und auch in der vorliegenden Studie nicht zu den Heurismen gezählt werden sollen (s. u.).

Das **Ziel** für diese Teilstudie ist die Entwicklung eines Kodierverfahrens, mit dem Heurismen in videographierten Problembearbeitungsprozessen von Lernenden, die in Paaren arbeiten, (zuverlässig) identifiziert werden können. Hierzu werden die folgenden Annahmen bzw. Festlegungen getroffen:

(1) Als Denkoperationen sind Heurismen nicht direkt beobachtbar; sie lassen sich allerdings (zumindest teilweise) in Äußerungen und Handlungen erkennen. Für die empirische Identifikation entsprechender Äußerungen und Handlungen wird ein Kodiermanual (s. u.) verwendet. Auf theoretischer Ebene lassen sich Heurismen von geistiger Beweglichkeit (vgl. Abschnitt 2.1) dadurch abgrenzen, dass erstere bewusst (im Sinne von System 2-Denken) eingesetzt werden (s. Abschnitt 2.2). Auf der empirischen Ebene zeigt sich geistige Beweglichkeit (z. B. Aspektbeachtung) dadurch, dass gewisse Erkenntnisse nicht (z. B. mithilfe systematischen Probierens oder des Betrachtens von Spezialfällen) „erarbeitet" werden müssen (siehe das Beispiel von Jana in Kapitel 1). In diesem Sinne wird das Vorkommen entsprechender Resultate auf Seiten der Problemlöser (z. B. das Finden einer Lösungsidee) ohne damit in Verbindung stehende beobachtbare heuristische Handlungen, als geistige Beweglichkeit gedeutet.[3]

(2) Nach dem Verständnis von Autoren wie Kilpatrick (1967) oder Wilson und Kollegen (1993) handelt es sich bei Heurismen um Verfahren, bei deren Anwendung nicht von vornherein klar ist, ob sie zur Lösung des Problems entscheidend beitragen. Dies bedeutet für die hier vorgestellte Studie, dass auch vermeintlich algorithmische Verfahren als Heurismen kodiert werden können, wenn sie nicht mit der Gewissheit eingesetzt werden, die vorgelegte Aufgabe zu lösen. Das beste Beispiel hierfür ist das Aufstellen von und die Arbeit mit Gleichungen, die je nach Situation algorithmisch oder heuristisch genutzt werden können. Aber auch für andere – im allgemeinen als algorithmisch eingestufte – Verfahren lassen sich Situationen finden, in denen ihr Einsatz dem Finden einer Lösung dient, ohne die Lösungsfindung zu garantierten.

(3) Die Heurismen-Definitionen (s. Abschnitt 2.2) machen deutlich, dass der Einsatz von Heurismen fast zwangsläufig mit metakognitiver Aktivität verbunden ist. Wenn man in einem empirischen Prozess Heurismen erfasst, hat man dementsprechend auch Hinweise auf Metakognition gefunden. Andersherum gibt es aber metakognitive Aktivitäten wie z. B. die Kontrolle von (Zwischen-) Ergebnissen, die in der Regel nicht zu den Heurismen hinzugezählt werden. Beispielsweise unterscheiden Schukajlow und Leiss (2011, S. 55 f.) metakognitive Aktivitäten bewusst von heuristischen Tätigkeiten. Metakognitive Aktivitäten würden die Auswahl und Anwendung der kognitiven (heuristischen) Strategien steuern, seien selbst aber keine Heurismen. Diesem Ansatz wird hier aus verschiedenen Gründen gefolgt: Da eine Trennung von Heurismen und Metakognition auf theoretischer Ebene von vielen Autoren vorgenommen wird (z. B. Schoenfeld, 1985; Schukajlow & Leiss, 2011), scheint dies auch auf empirischer Ebene sinnvoll zu sein. Metakognitive Aktivitäten tragen zur Überprüfung und Sicherung von Wissen bei, nicht aber wie kognitive Aktivitäten zur Generierung von Ideen; dies ist insbesondere für den Fokus der vorliegenden Studie relevant: die Untersuchung von geistiger Beweglichkeit und Heurismen. Wegen der Vorarbeiten von Bruder (2000, 2003) zum Zusammenhang von geistiger Beweglichkeit und Heurismen erscheint es auch aus forschungspragmatischen Gründen sinnvoll zu sein, Bruders Heurismenkategorisierung zu verwenden, in der metakognitive Aktivitäten nicht enthalten sind. Zudem ermöglicht erst die getrennte Erfassung dieser beiden Konzepte den Vergleich der Wirksamkeit von Heurismen- und Selbstregulationstrainings, wie ihn beispielsweise Collet (2009) vorgenommen hat. Eine solche getrennte (also möglichst überschneidungsfreie) Erfassung ist auch für die vorliegenden Daten relevant, da ein Teil der hier vorgestellten Daten separat auf das Auftreten metakognitiver Aktivitäten untersucht wurde (Rott, 2014a).

3.2 Die Datenbasis

Um das Forschungsziel, die Erstellung des Heurismen-Kodierverfahrens, zu erreichen, wurden empirisch Daten von Studierenden beim Problemlösen gesammelt: Hierzu wurden mehrere Probleme in verschiedenen Kontexten eingesetzt; zwei dieser

Probleme werden im vorliegenden Artikel betrachtet (siehe Tabelle 2). Neben der Betreuung von Masterarbeiten mit dem Thema Problemlösen, in denen Problemlöseprozesse gefilmt und ausgewertet wurden, wurden die Daten insbesondere im Rahmen zweier Lehrveranstaltungen erhoben – (a) in einem Seminar zum Problemlösen im Wintersemester 2008/09 und (b) in einer Vorlesung mit Übung zum Problemlösen im Wintersemester 2009/10. Diese beiden Veranstaltungen wurden an der Universität Hannover für Bachelor-Studierende des Mathematik-Lehramts angeboten, die Problemlöseaktivitäten fanden jeweils zu Beginn des Semesters statt. Die Studierenden wurden gebeten, Probleme in Paaren zu bearbeiten, um den Forschern über die Kommunikation Zugang zu den Gedanken der Problemlöser zu ermöglichen. Diese Problembearbeitungsprozesse wurden gefilmt, die Produkte (Zeichnungen, Rechnungen, Antwortsätze etc.) eingesammelt. Es wurden insgesamt 37 Prozesse mit verschiedenen Problemen gefilmt – davon zwölf mit der „Bierdeckel“- und sechs mit der „Zahlenreihe“-Aufgabe (s. u.). Im weiteren Verlauf des Seminars bzw. der Übung wurden diese Prozesse mit den Studierenden – teilweise in Einzelgesprächen und teilweise im Plenum – besprochen und analysiert.

3.3 Methodisches Vorgehen zur Erstellung eines Heurismen-Kodiermanuals

Zur Erreichung des Ziels der vorliegenden Teilstudie wurde in Anlehnung an Koichu und Kollegen (2007) ein Handbuch zur Kodierung von Heurismen in Problembearbeitungsprozessen entwickelt. Die Einträge in diesem Handbuch – die sogenannten *Heurismen-Kodes* – wurden mithilfe eines induktiv-deduktiven Verfahrens erstellt, das die wissenschaftlichen Standards einer qualitativen Inhaltsanalyse erfüllt (z. B. Arbeit mit fixiertem Material sowie systematisches, regel- und theoriegeleitetes Vorgehen; vgl. Mayring, 2008, S. 12 ff.): Nach Mayring (ebd., S. 74 ff.) handelt es sich bei der Entwicklung, Anwendung und Rücküberprüfung eines Kategoriensystems um den zentralen Teil einer qualitativen Inhaltsanalyse. Die Definition entsprechender Kategorien kann und soll dabei sowohl induktiv – direkt aus dem Material – als auch deduktiv – aus Voruntersuchungen, dem bisherigen Forschungsstand und Theorien – erfolgen.

In der vorliegenden Studie wurden einerseits in ausgewählten Problembearbeitungsprozessen der oben genannten Studierenden zunächst alle Stellen markiert, die Hinweise auf bewegliches Denken, Kreativität, Ideengenerierung, Problemlösestrategien etc. enthielten; dies schließt z. B. alle Stellen mit ein, in denen die Problemlöser neue Ideen geäußert haben oder Fortschritte auf dem Weg zur Lösung erzielen konnten (*induktives Vorgehen*, vgl. Mayring 2008, S. 74 ff.). Andererseits wurden die Prozesse auf der Basis des Literaturstudiums (siehe Kapitel 2) und der stoffdidaktischen Aufgabenanalyse auf das Auftreten der theoretisch beschriebenen Heurismen hin untersucht (*deduktives Vorgehen*, vgl. ebd.).

Aus der Kombination dieser beiden Vorgehensweisen wurde ein Kodiermanual für Heurismen erstellt, das in Auszügen in den Tabellen 3 – 5 (Anhang; sortiert nach den Kategorien von Bruder & Collet, 2011) dargestellt ist. Die in den Tabellen mit (*) markierten Kategorien wurden deduktiv aus der Literatur gewonnen und konnten mit empirisch gebildeten Kategorien in Einklang gebracht werden. Die mit (+) markierten Kategorien wurden induktiv aus den Prozessen gewonnen, in der gesichteten Literatur wurden sie nicht als Heurismen beschrieben.

Obwohl die Studierenden nicht alleine gearbeitet haben, gab es Paare, in denen die Problemlöser (mehr oder weniger) unabhängig voneinander gearbeitet und unterschiedliche Vorgehensweisen gezeigt haben. In diesen Fällen wurden die Heurismen der beiden Personen unabhängig voneinander kodiert, was bei der Bestimmung der Interraterübereinstimmung (s. u.) entsprechend berücksichtigt wurde. Zu der Entwicklung eines Kodierverfahrens gehört auch der Anspruch, sich an Gütekriterien wie der Objektivität (insb. Interraterübereinstimmung) zu messen, um qualitative Analyseschritte methodisch kontrolliert vollziehen zu können (Mayring, 2008, S. 74 ff.). Im vorliegenden Fall wurde die wissenschaftliche Güte des Verfahrens wie folgt sichergestellt, wobei – wie von Mayring (2008) gefordert – eine formative und eine summative Evaluation unterschieden wurden:

- *formativ*: Während der Erstellung des Kodiermanuals wurde regelmäßig im Forscherteam diskutiert, inwiefern es sich bei den induktiv gefundenen Stellen um Heurismen handeln könnte und wenn ja, um welche (*konsensuelle Validierung*, Bortz & Döring, 2006, S. 326 ff.). Zudem wurde in den Gesprächen mit den Studierenden überprüft, inwiefern die Kodierung mit der Selbstwahrnehmung der Problemlöser übereinstimmt (*kommunikative Validierung*, ebd.).
- *summativ*: Nach der Fertigstellung des Manuals auf der Basis der Studierendenprozesse wurden die Prozesse von Fünft- und Sechstklässlern (s. Abschnitt 4.4) nach den Vorgaben des Manuals kodiert. Hierbei wurden zwei Schritte unterschieden: (1) das Auftreten eines Heurismus im Prozess als Zeitpunkt und (2) die Benennung

des gefundenen Heurismus bzw. seine Einordnung in eine Kategorie des Handbuchs. Alle Prozesse wurden von zwei Forschern unabhängig voneinander eingeteilt, deren *Interraterübereinstimmung* (prozentuale Übereinstimmung) $P_A > 0{,}70$ bzw. $P_A > 0{,}85$ für die Kodierung der Zeitpunkte bzw. für die Charakterisierung der Heurismen war.[4] Nach der getrennten Kodierung wurden *alle* Prozesse diskutiert; abweichende Zeitpunkte und Kategoriezuweisungen wurden *konsensuell validiert*. Darüber hinaus spricht die Übereinstimmung der Ergebnisse der vorliegenden Studie mit denen anderer Studien zum Problemlösen (vgl. Abschnitte 4.4 – 4.5) für die *konvergente Validität* der verwendeten Methode.

3.4 Ergebnisse der Heurismen-Identifikation

Wie bereits geschrieben, ist das Ergebnis dieser Teilstudie das Heurismen-Kodiermanual (Tabellen 3 – 5 im Anhang). Neben den allgemeinen Kategorien-Beschreibungen gibt es aufgabenspezifische Operationalisierungen für die Heurismen-Kodes, passend zu den jeweiligen Aufgaben. Für die in diesem Artikel betrachteten Aufgaben wurden diese Operationalisierungen bei der Manual-Erstellung in der Diskussion mit den Studierenden erstellt. Bei späteren Anwendungen des Kodiermanuals auf andere Aufgaben (z. B. Herold-Blasius & Rott, 2016) wurden entsprechende Operationalisierungen im Prozess des Kodierens entwickelt.

4. Heurismen in den Problemlöseprozessen von Fünft- und Sechstklässlern

4.1 Die Datenbasis

Wie in Abschnitt 2.6 angekündigt, wurde das Heurismen-Kodierverfahren auf die Prozesse von Schülern zu Beginn der Sekundarstufe I angewandt. Die Probanden, deren Problembearbeitungen für diese Studie ausgewertet wurden, stammen aus zwei Gruppen von Fünft- und Sechstklässlern (Alter zwischen 10 und 12 Jahren).

Der größte Teil der hier vorgestellten Daten (32 von 41 Prozessen) wurde im Rahmen des Hannoveraner Projekts MALU (Mathe AG an der Leibniz Universität) erhoben, das ursprünglich von D. Lange konzipiert wurde (vgl. Rott, 2014a, dort wurden die Schülerprozesse unter anderen Gesichtspunkten ausgewertet): Von 2008 bis 2010 nahmen, aufgeteilt auf halbjährige Förderperioden, insgesamt 46 Schüler (davon 24 weiblich) an der AG teil. An den AG-Nachmittagen haben die Schüler im Schnitt zwei bis drei Probleme bearbeitet; wenn sie beschlossen, die Arbeit an einem Problem abgeschlossen zu haben, wurde ihnen das nächste gereicht. Die Bearbeitung der Probleme wurde auf Video aufgezeichnet. Im Anschluss an diese Phase haben die Schüler ihre Ergebnisse im Plenum verglichen. Die Teilnehmer wurden nicht im Problemlösen geschult, insbesondere fand kein explizites Heurismentraining statt. Die Schüler konnten lediglich beim Bearbeiten der Probleme und beim Vergleich der Aufgabenlösungen Erfahrungen sammeln – bewusste Reflexionen zu Heurismen und zum Ablauf von Problemlöseprozessen wurden von den AG-Leitern aus forschungsmethodischen Gründen vermieden.

Aufgrund von Fehlterminen haben nicht alle Schüler alle Aufgaben bearbeitet. Die Auswahl der Kinder wurde durch Mathematiktests (u. a. eine verkürzte Version des Indikatoraufgaben-Tests von Käpnick, 1998) gesteuert, die an mehreren Gymnasien in Hannover durchgeführt wurden – mit dem Ziel sowohl sehr gute als auch mittelstarke Schüler einzuladen. In Bezug auf eine allgemeine Motivation, sich auf mathematische Probleme einzulassen, stellen die MALU-Schüler eine Positivauswahl dar, da sie nachmittags freiwillig in die Universität kamen, um an der AG teilzunehmen.

Der zweite Teil der Daten stammt von Prozessen herausragender Problemlöser in der Altersklasse der Fünft- und Sechstklässler: Es nahmen Schüler teil, die die Endrunde der Mathematik-Olympiade 2009/10[5] erreichten (8 Schüler, davon 2 weiblich) oder Preise beim Känguru-Wettbewerb gewonnen hatten (2 Schülerinnen). Mit diesen zehn Schülern wurden kurz nach den jeweiligen Wettbewerben drei Problembearbeitungen in einer Sitzung aufgezeichnet, vergleichbar zu den MALU-Sitzungen: Die Schüler arbeiteten in Paaren und erhielten, wenn sie die Arbeit an einem Problem abgeschlossen hatten, das nächste Problem ausgehändigt. Im Vergleich zu den MALU-Schülern können die Wettbewerbsteilnehmer als Problemlöse-„Experten" angesehen werden, da sie durch das erfolgreiche Bestehen mehrerer Wettbewerbsrunden stabile und reproduzierbare, herausragende Leistungen auf diesem Gebiet gezeigt haben, was als ein Kriterium für Expertise angesehen wird (vgl. Chi, 2006). Die Prozesse dieser Teilnehmer wurden erhoben, da in ihnen mehr Anzeichen für geistige Beweglichkeit zu erwarten sind als in den Prozessen nicht so erfolgreicher Problemlöser.

In diesem Artikel werden zwei (von drei) Aufgaben vorgestellt und analysiert, die sowohl von den MALU- als auch den Wettbewerbs-Teilnehmern bearbeitet wurden. Die Datenbasis dieser Studie beruht auf den Videoaufnahmen („Prozesse") sowie den eingesammelten Aufzeichnungen („Produkte") von insgesamt 54 Schülern der MALU- und der Wettbewerbs-Gruppe zu diesen zwei Problemen.

Um die Prozesse besser nachvollziehen und einen Einblick in die Gedankengänge der Kinder erlangen zu können, bedarf es einer entsprechenden Methode. Goos und Galbraith (1996) diskutieren mögliche Schwachstellen des lauten Denkens, unterbrechender Interview-Fragen und retrospektiver Fragen. Ihr Fazit lautet, dass Partnerarbeit am besten geeignet sei, Störungen, Einflüsse der Interviewumgebung und unvollständige sowie inkonsistente Verbalisierungen bestmöglich zu vermeiden. Dieser Einschätzung wird hier gefolgt, v. a. da lautes Denken für Probanden der untersuchten Altersgruppe schwierig zu erlernen ist und insbesondere für die Wettbewerbsteilnehmer keine Möglichkeit eines vorhergehenden Trainings bestand. Ein Nachteil von Partnerarbeit ist, dass es aufgrund von Kooperationseffekten nur eingeschränkt möglich ist, Rückschlüsse auf die Problemlösekompetenz einzelner Schüler zu ziehen.

4.2 Aufgaben

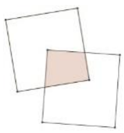
Für die Problemlöseforschung in Hannover wurde ein Aufgabenpool aus Problemlösebüchern, Aufgabensammlungen und mathematischen Wettbewerben zusammengestellt. Die Probleme wurden auf der Basis von Expertenlösungen ausgewählt; Kriterien hierfür waren (a) möglichst wenig benötigte fachlich-inhaltliche Vorkenntnisse, damit auch junge Schüler sie sinnvoll bearbeiten können. Hinzu kam (b) eine gewisse Vielfalt mathematischer Stoffgebiete, damit sich die Forschungsergebnisse nicht nur auf ein Gebiet beziehen, sowie (c) eine Vielzahl an möglichen Heurismen, um verschiedene Herangehensweisen zu ermöglichen.

Für die vorliegende Studie wurden zwei Probleme ausgewählt; ihre Formulierungen, das jeweilige mathematische Gebiet und eine kurze Analyse mit dem Fokus auf mögliche Heurismen sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

4.3 Auswertungsmethodik

Die Schülerprozesse wurden mithilfe des Heurismen-Kodierverfahrens kodiert, das in Kapitel 3 vorgestellt wurde. Eine Einschätzung, ob ein Problem von den Schülern erfolgreich bearbeitet wurde, wurde im Forscherteam getroffen und fiel stets einstimmig aus. Erfolgskriterium für die „Bierdeckel"-Aufgabe war die Antwort „immer ein Viertel" – eine Begründung war nicht erforderlich (wenn auch gewünscht). Bei der „Zahlenreihe"-Aufgabe musste für eine korrekte Antwort die komplette Reihe (in dieser oder der umgekehrten Reihenfolge) angegeben werden: 8,1,15,10,6,3,13,12,4,5,11,14,2,7,9.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Heurismenkodierung in zwei Abschnitten präsentiert. Für die in Abschnitt 4.4 (Ergebnisse in Bezug auf die Identifikation von Heurismen) vorgestellten Prozesse wurden 41 Videos einer Gesamtlänge von insgesamt 707 Minuten kodiert.

Aufgabenformulierung	**Mathematisches Gebiet und Heurismen**
Zwei Bierdeckel  Die beiden unten stehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt. Untersuche die Größe der Fläche, die von **beiden** Bierdeckeln überdeckt wird! [Idee aus: Schoenfeld (1985, S. 77)]	Mathematisches Gebiet: Geometrie Heurismen: Anfertigen von *informativen Figuren*, um unterschiedliche Lagen der Quadrate zu verdeutlichen, besonders die Darstellung von *Spezialfällen*. Einfügen von *Hilfslinien*, um den allgemeinen Fall auf den Spezialfall zurückzuführen (*Rückführungsprinzip*). Ausnutzen der Drehsymmetrie der Figur (*Symmetrieprinzip*). Aufteilen der gesuchten Fläche in berechenbare Stücke (*Zerlegungsprinzip*) und das Aufstellen von *Gleichungen*.
Marcos Zahlenreihe Marco möchte alle Zahlen von 1 bis 15 so in die 15 Kästchen schreiben, dass die Summe von jedem Paar benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ergibt: | | | | | | | | | | | | | | | | Stehen beispielsweise in drei aufeinander folgenden Kästchen die Zahlen 10, 6, 3, so ergibt die 6 sowohl mit der 10 in dem linken Nachbarkästchen (10+6=16) als auch mit der 3 in dem rechten Nachbarkästchen eine Quadratzahl (6+3=9). [Quelle: Fürther Mathematikolympiade (www.fuemo.de), 2005/06, 1. Runde]	Mathematisches Gebiet: Arithmetik Heurismen: Nutzen von *Tabellen* und anderen *Ordnungsmaßnahmen* (z. B. Auflisten und Abstreichen von Zahlen), um einen Überblick über mögliche Zahlen und Nachbarzahlen zu gewinnen. Letzteres kann auch in Form einer *informativen Figur* geschehen. Starten der Reihe mit verschiedenen Zahlen (*Systematisches Probieren*), dabei evtl. Rückschritte verwenden im Sinne eines *Backtracking*. Erkennen, dass am Rand nur 8 und 9 stehen können (*Suche nach Mustern*).

Tab. 2: Aufgabenauswahl und zugehörige Heurismen (kursiv markiert)

Bei den in Abschnitt 4.5 (Ergebnisse in Bezug auf Heurismen und geistige Beweglichkeit) vorgestellten Daten handelt es sich um die Teilmenge der 18 erfolgreichen Prozesse der zuvor vorgestellten Videos mit einer kumulierten Länge von 240 Minuten. Diese 18 von insgesamt 41 Prozessen setzen sich wie folgt zusammen: Die „Bierdeckel"-Aufgabe haben 5 von 16 MALU-Paaren und 4 von 4 Paare von Wettbewerbsteilnehmern lösen können; bei der „Zahlenreihe"-Aufgabe waren 4 von 16 MALU- und 5 von 5 Wettbewerbs-Paaren erfolgreich. Die in den Schülerprozessen kodierten Heurismen aus dem Manual werden dabei *kursiv* dargestellt.

4.4 Ergebnisse in Bezug auf die Identifikation von Heurismen

Die Erstellung des Kodiermanuals und die Auswertung der MALU-Prozesse zeigen deutlich, dass die Fünftklässler – ohne ein spezielles Problemlöse-Training, das über die Behandlung des Themas in der Primarstufe hinausgeht – eine Vielzahl verschiedener Heurismen verwenden. Es folgt eine Übersicht über die kodierten Heurismen in den MALU-Daten, die mehrfach aufgetreten sind.

Bei der „**Bierdeckel**"-Aufgabe haben 15 von 20 Paaren im Prozess Seitenlängen *gemessen*, um den gesuchten Flächeninhalt zu bestimmen (was hier nicht zielführend war). In elf Paaren wurden *informative Figuren* – Skizzen von Quadraten in verschiedenen Positionen zueinander – angefertigt. Von zwölf Paaren (davon fünf, die keine eigenen Skizzen gezeichnet haben,) wurden *Hilfselemente*, also Hilfslinien, eingefügt, um bestimmte Quadratseiten zu verlängern (s. Abb. 2). *Spezialfälle* wurden von elf Paaren gezeichnet, von denen vier sogar beide Spezialfälle gefunden haben (s. Abb. 2). Zudem haben einige Paare das rote Viereck zerlegt und so wieder zusammengesetzt, dass einer der Spezialfälle erkennbar wurde (*Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip*).

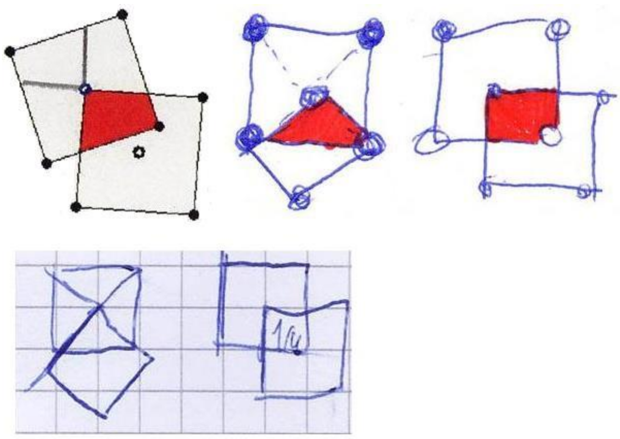


Abb. 2: Heurismen bei der „Bierdeckel"-Aufgabe: Hilfslinien und Spezialfälle

Der häufigste Heurismus bei „**Marcos Zahlenreihe**" war eine *Systematisierungshilfe*, eine Liste der Zahlen von 1 bis 15 zum Abstreichen, verwendet in 16 von 21 Prozessen. Eine weitere *Systematisierungshilfe*, eine Liste der Quadratzahlen, haben zwölf dieser Paare zusätzlich angefertigt. Dabei haben einige Schüler realisiert, dass Quadratzahlen größer als 25 nicht erreicht werden können (Abb. 3).

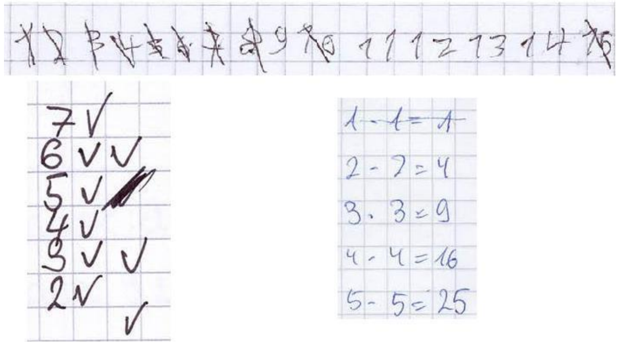


Abb. 3: Heurismen bei der „Zahlenreihe"-Aufgabe: Systematisierungshilfen

Sieben Paare haben das *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* angewendet, indem sie die Zahlen von 1 bis 15 in je zwei Summanden zerlegt haben (z. B. 4 = 1+3; 9 = 1+8 = 2+7 = …) (siehe Abb. 4, links). In sechs Prozessen wurden Aktionen als *Backtracking* kodiert, wenn bei einem Stillstand nicht eine komplett neue Zahlenreihe angefertigt wurde, sondern stattdessen solange Zahlen entfernt wurden, bis die Reihe anders fortgesetzt werden konnte. *Systematisches Probieren*, eine gezielte Variation von Startzahlen, wurde bei drei Paaren beobachtet. In einem Paar wurde eine *informative Figur* angefertigt: eine Art Diagramm, in dem mögliche Zahl-Kombinationen dargestellt sind (s. Abb. 4, rechts).

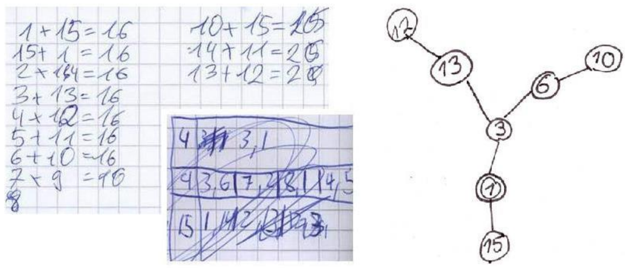


Abb. 4: Heurismen bei der „Zahlenreihe"-Aufgabe: Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip, informative Figur

4.5 Ergebnisse in Bezug auf Heurismen und geistige Beweglichkeit

In diesem Abschnitt soll anhand qualitativer Analysen der Problembearbeitungsprozesse aufgezeigt werden, inwiefern geistige Beweglichkeit und Heurismen bei der Lösungssuche helfen können. Hier werden nur noch Paare betrachtet, die eine korrekte Lösung der Probleme erarbeitet haben, da insbesondere in erfolgreichen Prozessen Anzeichen für geistige Beweglichkeit zu erwarten sind.

Die „**Bierdeckel**“-Aufgabe wurde insbesondere von denjenigen Paaren gelöst, die *Spezialfälle* betrachtet haben. Im allgemeinen Fall, wenn die beiden Quadrate in anderen Positionen zueinander liegen, war für die meisten Schüler nicht zu erkennen, wie groß die gemeinsam überdeckte Fläche ist; erst die Betrachtung von speziellen Lagen macht deutlich, dass die gesuchte Größe – zumindest in diesen Fällen – genau ein Viertel beträgt. Durch das Hinzufügen von *Hilfslinien* und die Betrachtung von *Symmetrien* konnten drei Paare (zwei MALU-Paare und ein Paar der Wettbewerbsteilnehmer) dann zu einer altersgemäßen Begründung kommen.

Hannelore und Lucy (MALU): Nach dem Lesen der Aufgabenstellung beginnen die beiden Schülerinnen zunächst (ab 01:03) mit dem *Messen* von Seitenlängen der Quadrate. Sie fügen (ab 01:30) *Hilfslinien* in die Abbildung auf dem Aufgabenblatt ein (Abb. 6, rechts) und versuchen, die gesuchte Flächengröße zu berechnen (*Zerlegen in Teilaufgaben*). Hierzu führt Hannelore (ab 03:55) *Bezeichnungen* ein, indem sie Punkte in der gegebenen Figur benennt. Schnell bemerken die beiden Schülerinnen, dass sie ihr erster Ansatz nicht ans Ziel führt und sie fragen sich, ob die Quadrate nicht auch anders zueinander liegen dürfen. Lucy beschreibt daraufhin (ab 04:20) einen *Spezialfall* („Dreh das mal so gerade.“). Beide wenden sich danach wieder der ursprünglich gegebenen Figur zu und zeichnen Linien (*Hilfselement*) ein, die eine Zerlegung andeuten (Abb. 6, rechts). Auf einmal (bei 06:57) ruft Lucy: „Ach, na klar! Stimmt, das ist genau so groß, wenn es hier bei der Ecke ist.“ Ihr fällt auf, das man ein so entstehendes Dreieck „abschneiden“ und an anderer Stelle wieder „einsetzen“ könne, um den Spezialfall zu erhalten (*Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip*). Sie schließt daraus, dass die gesuchte Fläche immer so groß ist wie im Spezialfall. Kurz darauf (07:45) fertigt sie eine entsprechende Skizze (*informative Figur*) an (Abb. 6, links), in der diese Gleichheit angedeutet wird. Allerdings schreiben die beiden nicht „ein Viertel eines Quadrates“, sondern berechnen die gesuchte Fläche in der gegebenen Abbildung. Insgesamt haben die beiden Schülerinnen 11:30 Minuten an diesem Problem gearbeitet.

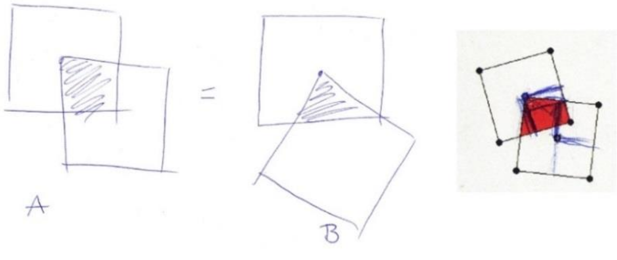


Abb. 6: Lucys Skizzen, „Bierdeckel“-Problem

Vincent und Jonatan (MALU): Beide Schüler beginnen nach dem Lesen (ab 00:50) damit, die Skizze vom Aufgabenblatt in ihr Heft zu übertragen (*informative Figur*). Vincent skizziert anschließend (01:12) einen *Spezialfall* (nicht-parallele Seiten) direkt neben seine erste Skizze (Abb. 7, links, erste und zweite Skizze). Bei 02:15 ruft Vincent: „Ist immer gleich groß! […] Die Fläche ist immer gleich groß.“ Jonatan widerspricht ihm zunächst, wobei er auf die vorgegebene Abbildung zeigt: „Du musst das mal so zeichnen.“ Daraufhin (ab 02:30) skizziert Vincent den zweiten *Spezialfall* (parallel), um seine Hypothese zu bestätigen (Abb. 7, links, dritte Skizze). Kurz darauf (ab 03:30) deutet er auf die Abbildung auf dem Aufgabenblatt; er zeigt auf die markierte Fläche, dreht sein Heft um 360° und sagt dabei: „Du kannst das da immer wieder eintragen.“ (*Symmetrieprinzip*). Dieses Argument scheint Jonatan zu überzeugen, er verlängert (ab 03:36) in der Abbildung auf seinem Arbeitsblatt die Seiten des unteren Quadrats (*Hilfselemente*) und schraffiert die so entstandenen Flächen in unterschiedlichen Richtungen (*Bezeichnungen*) (Abb. 7, rechts). Beide sind sich hinterher einig, dass die Fläche nur wegen seiner Lage genau ein Viertel sei: „Weil es da genau im Mittelpunkt ist, die Ecke.“ Der Prozess endet nach dem Aufschreiben eines Antwortsatzes nach 07:08 Minuten.

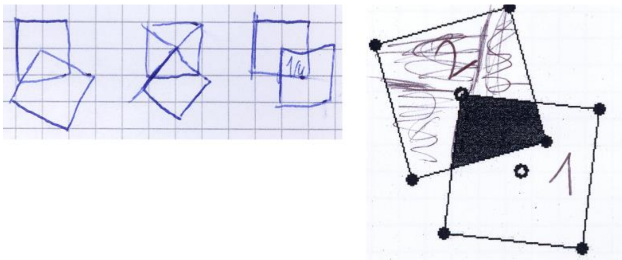


Abb. 7: Vincents (links) und Jonatans (rechts) Skizzen, „Bierdeckel“-Problem

Bernd und Tobi (Wettbewerbsteilnehmer): Diese beiden Schüler arbeiten insgesamt 02:20 Minuten an dieser Aufgabe: Nach dem Lesen machen beide zunächst deutlich, dass sie kein Lösungsschema für diese Aufgabe kennen. Bernd betrachtet etwa 30 Sekunden lang die vorgegebene Abbildung und sagt dann (01:10): „Wart‘ mal, Tobi, es müsste genau ein Viertel sein. Weil, wenn man das jetzt so dort rüber schiebt, müsste man dort auf genau vier Teile kommen.“ Bernd deutet dabei mit seinem Stift auf die vorgegebene Abbildung und tippt an vier Stellen auf das weiter oben liegende Quadrat [wie die Position der vier Vierecke in Abb. 7, rechts]. Tobi hat währenddessen ein Geodreieck so auf die vorgegebene Abbildung gelegt, dass er damit – ähnlich wie in Abbildung 7 (rechts) – Verlängerungen der Seitenlängen andeutet, ohne allerdings etwas zu skizzieren; evtl. hat er auch die Seitenlängen des farbigen

Vierecks *gemessen*. Nach dem Äußern der Lösungsidee stimmt Tobi seinem Partner schnell zu und deutet für Bernd noch einmal die Hilfslinien an. Den beiden reicht anscheinend diese Andeutung, es werden keine Hilfslinien eingezeichnet. Die beiden erbitten das nächste Problem, ohne ihre Lösung weiter zu begründen. In diesem kurzen Prozess wurde kein Heurismus kodiert.

Wie bei den beiden Paaren, die in der Einleitung (Kapitel 1) vorgestellt wurden (beide aus der MALU-Gruppe), sieht man auch bei diesen drei Paaren deutliche Unterschiede: Bernd hat nach kurzer Betrachtung der Aufgabenstellung sofort die korrekte Vermutung aufgestellt. Dass er die Quadrate gedanklich vermutlich gegeneinander gedreht hat, kann man seiner Erläuterung gegenüber seinem Partner entnehmen: „wenn man das jetzt so dort rüber schiebt […]“ – wobei er vermutlich eine Drehung anstelle einer Verschiebung meint. Seine Überzeugung, die richtige Lösungsidee gehabt zu haben, führt allerdings dazu, dass seine Lösung die am wenigsten explizit begründete der hier vorgestellten Lösungen ist. Vincent hat zwar auch schnell die richtige Idee geäußert, er hat sich die Situation zuvor allerdings mithilfe eines Spezialfalls veranschaulicht. Auch Lucy hat sich die Lösungsidee mithilfe der Betrachtung eines Spezialfalls erarbeitet, hat dafür aber deutlich länger benötigt als Vincent. Sowohl bei Vincent als auch bei Lucy zeigt sich im Vergleich zu Bernd, wie der Einsatz von Heurismen (Betrachtung von Spezialfällen, Zerlegungsprinzip und evtl. der Einbezug von Drehsymmetrie) den Mangel an geistiger Beweglichkeit (*Aspektbeachtung* und *Aspektwechsel*, in diesem Fall Durchspielen verschiedener geometrischer Konfigurationen) kompensieren kann.

Bei der „**Zahlenreihe**“-Aufgabe konnten insbesondere zwei Heurismen zu einer vollständigen Lösung beitragen: Hilfreich war eine Suche nach passenden Nachbarzahlen, um die Quadratzahl-Bedingung zu erfüllen, durch eine *Zerlegung und Ergänzung* der Zahlen in je zwei Summanden. Hierbei haben einige Schüler erkannt, dass die Zahlen 8 und 9 nur je eine mögliche Nachbarzahl besitzen und daher die Zahlenreihe starten bzw. beenden müssen. Ebenfalls erfolgversprechend war *systematisches Probieren*, bei dem nacheinander verschiedene Zahlen als Startzahlen der Reihe verwendet werden; wer dieses Verfahren bis zur Startzahl 8 oder 9 durchhält, sollte das Problem lösen können. Ein Großteil aller Schülerpaare, die die „Zahlenreihe“-Aufgabe bearbeitet haben, haben immer nur am rechten Ende der Reihe Zahlen ergänzt. Fünf der neun Schülerpaare, die dieses Problem erfolgreich lösen konnten (vier Paare der MALU-Gruppe und fünf der Wettbewerbsteilnehmer), lösten das Problem, indem sie ihre Zahlenreihe in beide Richtungen ergänzten.

Birk und Janus (MALU): Die beiden Schüler benötigen 33 Minuten, um dieses Problem zu lösen. Sie beginnen mit der Reihe „1, 3, 6, 10, 15“ und stecken dann erst einmal fest, da sie keine Zahl mehr zur Verfügung haben, die an die 15 passt (sie versuchen es mit 21, verwerfen diese Idee aber sehr schnell wieder). Daraufhin starten sie nacheinander mehrere Zahlenreihen; sie setzen diese Reihen fort, indem sie am rechten Ende solange Zahlen anhängen, bis sie nicht weiterkommen und mit einer anderen Startzahl von vorne beginnen. Um den Überblick über die bereits verwendeten Zahlen zu behalten, verwenden sie (ab 03:33) eine Liste aller Zahlen von 1 bis 15 zum Abstreichen (*Systematisierungshilfe*). In dieser Zeit nutzen sie (ab 17:28) teilweise das *Backtracking*, d. h. sie streichen die letzte(n) Zahl(en) weg und setzen ihre Reihe anders fort, anstatt komplett neu zu beginnen. Nach 22:10 Minuten hat Birk eine neue Idee; er erstellt eine *Tabelle*, in der er alle möglichen Kombinationen auflistet, mit zwei Zahlen kleiner als 16 auf eine Quadratzahl als Summe zu kommen (*Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip*). Auf diese Weise erkennt er (25:00), dass die Zahlen 8 und 9 jeweils nur einen möglichen Nachbarn besitzen und die Reihe starten und beenden müssen. Kurz nach dieser Erkenntnis lösen sie das Problem.

Marcel und Timm (MALU): In den ersten vier Minuten ihres Prozesses klären die beiden zunächst gemeinsam die Aufgabenstellung (T, 02:48: „Dürfen Quadratzahlen doppelt sein?“) und spielen verschiedene Zahlenbeispiele durch (T, 03:40: „Acht plus Fünfzehn sind? Dreiundzwanzig, reicht nicht“) Danach arbeiten die beiden etwa zehn Minuten lang nebeneinander her – sie reden miteinander, jeder verfolgt aber seine eigenen Ideen. Timm legt relativ früh (bei 03:02) eine Liste der Zahlen von 1 bis 15 an um zu kontrollieren, welche Zahlen er schon verwendet hat (*Systematisierungshilfe*). Er probiert verschiedene Zahlenkombinationen aus und notiert bei 07:30 eine Liste aller Quadratzahlen von 25 bis 1 (*Systematisierungshilfe*). Darunter notiert er systematisch Zahlenkombinationen (z. B.: 15+1, 14+2, …) (07:56, *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip*). Mithilfe dieser Kombinationen stellt bei 10:30 fest: „Die Neun muss unbedingt am Anfang stehen.“ Mit dieser Information startet er eine neue Reihe, die er bei 13:35 vervollständigt. Er resümiert: „Eigentlich ganz leicht, man muss nur die Sieben rauskriegen, äh, nur die Neun, dass die nur durch eine einzige Zahl geht.“

Marcel geht anders vor, schon bei 03:17 stellt er fest: „Acht müsste entweder der Anfang oder das Ende sein. Auf Acht geht ja nichts mehr.“ Dann legt er eine Reihe an, in der die Zahl 8 am Ende steht und trägt 1 davor ein. Er ergänzt Zahlen nach links in seiner Reihe, verwirft diese Reihe und beginnt eine neue. Wenn er nicht weiterkommt, was mehrfach passiert, stellt einzelne Zahlen oder Zahlblöcke um und arbeitet nach links oder rechts weiter. Bei 10:35 stellt er fest, dass ihm nur eine Zahl fehle. Er geht die Zahlen durch, die er schon verwendet hat („die eins, die zwei, die drei, …“) und bemerkt, dass ihm nur die Acht fehle. Diese ergänzt er bei 11:00 ans Ende seiner Reihe. Die Zeit, in der Timm noch arbeitet, nutzt er zur Kontrolle seiner Reihe, indem er die Summe von je zwei Zahlen über seine Reihe schreibt.

Robert und Lasse (Wettbewerbsteilnehmer): Die beiden Schüler lösen dieses Problem in 05:40 Minuten. Sie starten sofort (00:30) mit einer Liste der Zahlen zum Abstreichen (*Systematisierungshilfe*) und beginnen ihre erste Reihe mit dem gegebenen Beispiel, „3, 6, 10“. Nach rechts ergänzen sie „15, 1, 8“. Obwohl sie für die 8 keinen passenden Nachbarn finden, starten sie keine neue Reihe, sondern setzen das Beispiel (ab 01:18) nach links fort: „13“; „12“; „4“; „5“; „11“; „14“; „2“; „7“ und „9“. In der letzten Minute des Prozesses übertragen sie die fertige Reihe auf das Aufgabenblatt.

Auch bei diesen Paaren zeigt sich, dass geistig bewegliche Schüler wie Robert und Lasse das Problem relativ schnell lösen können, wenn sie Zahlen an beiden Enden der Reihe ergänzen; das scheinbar selbstverständliche Wechseln der Arbeitsrichtung deutet auf *Reversibilität* und/oder *Aspektwechsel* hin. Birk und Janus erarbeiten sich die Lösung in einem langwierigen Prozess mithilfe des Einsatzes mehrerer Heurismen, wobei ihnen insbesondere das Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip geholfen hat. Im Prozess von Marcel und Timm kann man beide Vorgehensweisen beobachten: Timm nutzt den Heurismus *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip*, um eine Reihe mit der Zahl 9 zu beginnen und diese dann vervollständigen zu können. Marcel ergänzt Zahlen links und rechts in seiner Reihe und stellt Zahlen sowie Zahlenblöcke um. Mit dieser Vorgehensweise löst er das Problem etwa 02:30 schneller als Timm.

Dass dieses Arbeiten in verschiedene Richtungen bei der „Zahlenreihe“-Aufgabe alles andere als selbstverständlich ist, zeigt das folgende Zitat. Käpnick berichtet, dass entsprechende Kognitionen nicht einmal in der Gruppe der mathematisch potentiell begabten Kinder durchgängig auftreten:

> Es läßt sich lediglich einschätzen, daß viele mathematisch potentiell begabte Dritt- und Viertkläßler fähig sind, bei relativ einfachen Aufgaben, in denen mathematische Inhalte weitestgehend isoliert betrachtet werden […], Gedankengänge umzukehren. Dagegen hat eine Vielzahl der mathematisch potentiell begabten Dritt- und Viertkläßler große Probleme, beim Bearbeiten komplexerer Problemaufgaben Gedankengänge selbständig umzukehren. Offensichtlich dominiert unter Dritt- und Viertkläßlern generell ein „Denken in eine Richtung“, und sie probieren Lösungsansätze immer wieder aus einer bestimmten „Denkrichtung“ heraus. Dieses Untersuchungsergebnis stimmt im wesentlichen [sic] mit den diesbezüglichen Ergebnissen von Krutetzki (vgl. Krutetzki 1968 b, S. 55-56) überein. (Käpnick, 1998, S. 266)

5. Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zur empirischen Identifikation von Heurismen

Diesem Artikel liegt ein stark empirisch geprägtes Verständnis von Heurismen zugrunde: Heurismen werden verstanden als Problemlöseaktivitäten, die im Rahmen von Problemlöseprozessen beobachtbar bzw. rekonstruierbar sind. In vielerlei Hinsicht wird diese Auffassung dem Heurismenverständnis vieler Autoren nicht gerecht, wenn man beispielsweise an die folgende Beschreibung denkt: „[…] a generalized and decontextualized piece of experience of problem solvers“ (Koichu et al., 2007, S. 101). Koichu und Kollegen (ebd.) fassen verschiedene Verwendungsweisen des Begriffs „Heurismus“ zu drei Kategorien zusammen: (i) Faustregeln und Ratschläge für Problemlösen, (ii) nützliche Einheiten zur Beschreibung und Analyse von mathematischem Denken und (iii) kognitive/metakognitive Werkzeuge beim mathematischen Problemlösen. Von diesen drei Auffassungen ist die zweite hier maßgeblich. Auf solche Schwierigkeiten in der Begriffsauffassung hatte übrigens auch schon Kilpatrick (1967) in seiner empirischen Arbeit zu Heurismen hingewiesen.

Die erste Teilstudie dieses Artikels widmet sich dementsprechend dem Ziel, Heurismen (objektiv und reliabel) in empirisch vorliegenden Problembearbeitungsprozessen zu identifizieren. Wie in Kapitel 2 festgestellt wurde, handelt es sich bei Heurismen um Denkoperationen, Methoden oder (kognitive) Werkzeuge (vgl. Abschnitt 2.2), also um Kognitionen. Als solche können Heurismen nicht direkt beobachtet werden. Stattdessen wird *beobachtbares Verhalten* (Äußerungen, Handlungen, Aufzeichnungen) kodiert, d. h. bei der Identifikation von Heurismen handelt es sich um Interpretationen der Beobachter; und nur in Ausnahmefällen sprechen Schüler den Einsatz ihrer Strategien und Techniken explizit an, was eine Kodierung dann meist erleichtert. In vielen Fällen muss zudem davon ausgegangen werden, dass es sich bei den Vorgehensweisen der Schüler nicht um gefestigte Heurismen handelt, sondern eher um „Strategiekeime“ im Sinne von

Stein (1996, vgl. Abschnitt 2.5). Insbesondere die Abgrenzung zwischen heuristischen, algorithmischen und metakognitiven Aktivitäten ist dabei nicht immer eindeutig.

Um Interpretationen dieser Art an wissenschaftlichen Gütekriterien zu orientieren, wurde die Kodierung von Heurismen mithilfe eines Kodiermanuals realisiert, das im Rahmen eines induktiv-deduktiven Verfahrens entwickelt wurde. Dieser Kodierung konnte einerseits Objektivität in Form einer hohen Interraterübereinstimmung bescheinigt werden. Geschulte Kodierer waren sich in der Regel schnell einig, dass bzw. welche Heurismen in den jeweils analysierten Prozessen auftreten. Kleinere Unstimmigkeiten gab es höchstens bei einander sehr ähnlichen Kodes wie *Spezialfall* und *Extremfall* oder *Analogieprinzip* und *ähnliche Aufgabe*. Schwierigkeiten traten nur beim Bestimmen des Zeitpunkts des ersten Auftretens von Heurismen auf, diese konnten durch verbesserte Operationalisierungen behoben werden. Durch den durchgängigen Einsatz mehrerer Kodierer konnten auch schwierige Unterscheidungen von Heurismen und Algorithmen diskutiert und im Konsens getroffen werden.

Andererseits konnte die Validität der Kodierung mithilfe von Probanden (kommunikativ), Forschern (konsensuell) und anhand der Ergebnisse (konvergent) sichergestellt werden (vgl. Bortz & Döring, 2006, S. 326 ff.; s. Abschnitt 4.4).

Im Ergebnis liegt also ein Kodiersystem vor, das die Identifikation von Heurismen in Problemlöseprozessen ermöglicht. Die Orientierung an der Bruder'schen Heurismenkategorisierung verspricht aufgrund deren Verbreitung ein schnelles Vertrautwerden mit den Kodes sowie den Vergleich von Heurismen mit Erscheinungsformen geistiger Beweglichkeit (wie bei Collet, 2009). Die Realisierung der Kodes mithilfe allgemeiner und aufgabenspezifischer Operationalisierungen ermöglicht eine schnelle Anpassung des Manuals an andere Aufgaben für andere Studien.

Einschränkend sollte hier vielleicht erwähnt werden, dass das Kodiermanual aufgrund der großen Anzahl möglicher Kodes nicht immer ganz einfach einsetzbar ist – schon gar nicht von Lehrpersonen im Unterricht, letzteres ist aber auch nicht intendiert. Durch eine stoffdidaktische Analyse der eingesetzten Probleme (wie in Tab. 2 angedeutet) kann die Kodierung erleichtert werden, indem im Vorfeld herausgearbeitet wird, welche Heurismen für die jeweiligen Probleme relevant sind.

5.2 Heurismen in den Prozessen von Schülern zu Beginn der Sekundarstufe I

In der zweiten Teilstudie geht es um die Fragen, wie der Einsatz von Heurismen in den videographierten Prozessen von Fünft- und Sechstklässlern aussieht. Hierfür wurden zwei Gruppen von Schülern untersucht: Teilnehmer des Projektes MALU mit mittelstarken bis sehr guten Schülern sowie erfolgreiche Teilnehmer mathematischer Wettbewerbe als besonders gute Problemlöser.

Die Auswertung der MALU-Prozesse zeigt zunächst, dass die Schüler im Sinne der Definition problemlösend tätig sind, d. h. sie kennen keine Verfahren zur direkten Lösung der gestellten Aufgaben (vgl. Kapitel 1). Die qualitativen Analysen machen – in Übereinstimmung mit der Literatur (z. B. Schoenfeld, 1985; Bruder & Collet, 2011) – deutlich, inwiefern den Schülern der Einsatz von Heurismen helfen kann, die jeweils vorhandenen Barrieren zu überwinden.

In der Auflistung der kodierten Heurismen fällt auf, dass Tätigkeiten als Heurismen kodiert wurden, die in anderen Veröffentlichungen zu diesem Thema keine Erwähnung finden. Tätigkeiten wie das *Messen*[6] oder das Anfertigen einer *Systematisierungshilfe* sind aber „Denkoperationen, die [beim Problemlösen] von Nutzen sind" (vgl. Pólya, 1949, S. 155 f.) und sie werden nicht mit der Gewissheit eingesetzt, die Aufgabe zu lösen. Damit handelt es sich nach den in Kapitel 2 angeführten Definitionen um Heurismen.

Des Weiteren wird deutlich, dass ein Heurismus, wie z. B. das Anfertigen einer *informativen Figur* oder das *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip*, bei verschiedenen Problemen sehr unterschiedlich aussehen und evtl. erst aus einer rückblickenden Perspektive als „der gleiche Heurismus" identifiziert werden kann (vgl. Schoenfeld, 1992). Dies könnte v. a. für Schüler mit wenig Erfahrung im Einsatz von Heurismen Bedeutung haben.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass dieser Teil der Datenanalyse die Ergebnisse aus der Literatur bestätigt, ohne überraschende Resultate zu enthalten: Es konnte gezeigt werden, dass und wie Heurismen beim Problemlösen hilfreich sein können und dass Heurismen sehr unterschiedliche Gestalt annehmen können, auch wenn sie aus deskriptiver Perspektive in die gleiche Kategorie gehören. Dieser Teil der Studie dient der Validierung des Kodiermanuals und leistet als Replikation (vgl. Bortz & Döring, 2006, S. 37 f.) einen Beitrag zur „Festigung und Erweiterung des Kenntnisbestandes einer Wissenschaft […]".

5.3 Geistige Beweglichkeit beim Problemlösen

In einem qualitativen Vergleich verschiedener erfolgreicher Prozesse aus Teilstudie 2 wurde schließlich auf Anzeichen von geistiger Beweglichkeit geschaut. Mit Bezug auf das Konzept der Intuition und unbewusste Prozesse, wie sie im Rahmen von *Dual Process*-Theorien beschrieben werden, wurde auf entsprechende Anzeichen geachtet: Die Prozesse wurden deutlich schneller beendet als von anderen Paaren, vor allem die Lösungsidee (bei der „Bierdeckel"-Aufgabe) bzw. eine Idee, die auf dem Weg zur Lösung sehr hilfreich ist (bei der „Zahlenreihe"-Aufgabe), wurde sehr schnell gefunden.

Auch kam es (insbesondere bei der „Bierdeckel"-Aufgabe) vor, dass – mit diesem Verständnis intuitiv gewonnene – Ergebnisse nicht bzw. nicht gut von den Problemlösenden begründet werden konnten. Dies passt zu den Beobachtungen von Käpnick (2006), der bei begabten Grundschulkindern beobachtet hat, dass es intuitive Problemlöser gibt, die blitzschnell und sprunghaft denken und spontan Lösungen finden, dabei aber Schwierigkeiten zeigen, ihre Gedankengänge zu äußern und ihre Lösungswege zu begründen („Das sieht man doch!").

Der hier vorgestellte Ansatz zur Messung von System 1-Prozessen unterscheidet sich von den verbreiteten Herangehensweisen, in denen Reaktionszeiten gemessen (z. B. Van Hoof, Lijnen, Verschaffel & Van Dooren, 2013) oder Probanden durch enge zeitliche Vorgaben unter Zeitdruck gesetzt werden (z. B. Gillard, Van Dooren, Schaeken & Verschaffel, 2009). In solchen Studien werden in der Regel allerdings auch nur Aufgaben eingesetzt, die in kurzer Zeit lösbar sind (z. B. Größenvergleich von Bruchzahlen) und keine anspruchsvollen mathematischen Probleme wie in der vorliegenden Studie.

Der Ansatz zur empirischen Erfassung von mathematischer Intuition und geistiger Beweglichkeit, der hier vorgestellt wird, ermöglicht – wie dies auch für die Heurismen festgestellt wurde (vgl. Abschnitt 5.1) – keine vollständige Erfassung des Konzepts. Viele kognitive Aktivitäten, die beispielsweise von Lompscher oder Hasdorf zur geistigen Beweglichkeit gezählt werden, fallen nicht unter dieses sehr enge Verständnis von geistiger Beweglichkeit als System 1-Prozess. Betont werden soll aber, dass es sich hier – im Gegensatz zur Studie von Collet (2009), in der geistige Beweglichkeit nur indirekt, über die Anzahl kodierter Heurismen, erfasst werden konnte, – um einen direkten Zugang zu diesem Konstrukt handelt.

Bei der hier vorgestellten Interpretation von geistiger Beweglichkeit fällt auf, dass sie insbesondere – aber nicht ausschließlich – in den Prozessen der Wettbewerbsteilnehmer gefunden wurde. Im Zusammenhang mit den kodierten Heurismen zeigt sich der folgende Zusammenhang: Die Schüler, bei denen geistige Beweglichkeit identifiziert wurde, mussten ihre Lösungsidee nicht mithilfe von Heurismen vorbereiten, wie es die übrigen erfolgreichen Schüler getan haben: Beispielsweise fertigten Schüler, die bei der „Bierdeckel"-Aufgabe die Quadrate in ihrer Vorstellung nicht gegeneinander verdrehen können, Zeichnungen von Quadraten in verschiedenen Positionen zueinander an.

Vor dem Hintergrund dieses Verständnisses von geistiger Beweglichkeit und von Heurismen möchte ich Collet (2009) widersprechen, die zum Zusammenhang von Heurismen und geistiger Beweglichkeit Folgendes sagt:

> Eine Analyse der von den Schülern gewählten Lösungswege im Hinblick auf den Einsatz heuristischer Vorgehensweisen kann Auskunft über die geistige Beweglichkeit eines Schülers geben. Demnach würde eine Vielzahl eingesetzter Heurismen zur Bearbeitung von Problemlöseaufgaben, die mit einer zumindest teilweisen erfolgreichen Bearbeitung einhergehen sollte, für eine hohe geistige Beweglichkeit eines Schülers oder Kenntnisse über heuristische Vorgehensweisen sprechen. Wenige oder keine eingesetzten Heurismen können als Mangel an geistiger Beweglichkeit gedeutet werden. (Collet, 2009, S. 62)

In der vorliegenden Studie hat es sich gerade gezeigt, dass bei den Schülern, die als geistig beweglich eingeschätzt wurden, nur sehr wenige Heurismen beobachtet wurden. Im Gegensatz dazu waren es die etwas weniger geistig beweglichen Schüler, die mithilfe von Heurismen (und mehr Zeit) ihren Mangel an geistiger Beweglichkeit kompensieren konnten. Dieses Ergebnis lässt sich als qualitative Stütze des Konzepts der heuristischen Bildung von Bruder (2000, 2003) deuten.

Offen bleiben muss an dieser Stelle, ob es sich bei der geistigen Beweglichkeit um eine angeborene geistige Eigenschaft (vgl. die Kriterien mathematischer Begabung, z. B. bei Krutetskii, 1976), um etwas Erlerntes (z. B. nicht explizierte Heurismen) oder um eine Mischung beider Möglichkeiten handelt. Aus der Expertiseforschung (z. B. Chi, 2006) ist bekannt, dass fachbezogene Intuition trainiert werden kann und dass Experten Heurismen zielführender einsetzen können und daher weniger Heurismen benötigen als Novizen:

> Experts are more successful at choosing the appropriate strategies to use than novices. […] Experts not only will know which strategy or procedure is better for a situation, but they also are more likely than novices to use strategies that have more frequently proved to be effective. […] Experts can retrieve relevant domain

> knowledge and strategies with minimal cognitive effort […]. They can also execute their skills with greater automaticity. (Chi, 2006, S. 24)

Dies könnte dafür sprechen, dass die beobachteten Anzeichen für geistige Beweglichkeit (zumindest teilweise) ein Ergebnis der Erfahrung der Wettbewerbsteilnehmer im Problemlösen darstellen.

5.4 Grenzen der Studie

Die wichtigsten Einschränkungen der vorliegenden Studie stellen sicherlich die Konzeptualisierungen des Heurismenbegriffs und der geistigen Beweglichkeit dar (vgl. Abschnitte 5.1 und 5.3). Beide Konzepte werden hier bewusst auf beobachtbare bzw. rekonstruierbare Zugänge reduziert, um ihre empirische Untersuchung zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang wird mit der Unterscheidung von System 1- und System 2-Prozessen auch eine Grenzlinie zwischen geistiger Beweglichkeit und Heurismen gezogen, die konzeptuell nicht so eindeutig verlaufen kann. Beispielsweise müsste auch einem Schüler, der flexibel zwischen verschiedenen (System 2-)Heurismen wechselt, geistige Beweglichkeit bescheinigt werden, was hier nicht geschieht.

Zusätzlich zu den gerade angesprochenen Einschränkungen sind weitere Grenzen der Studie zu nennen: In der vorliegenden Studie kann nur wenig über eine „heuristische Bildung" ausgesagt werden; von den beiden Aspekten einer „heuristic literacy" – abrufbares Wissen über Heurismen und die Kompetenz, diese situationsangemessen zu verwenden (Koichu et al., 2007, S. 100), – kann der erste nicht erfasst werden und über den zweiten werden keine Aussagen getroffen.

Aus methodischer Sicht lässt sich einwenden, dass die Sozialform Partnerarbeit den Verlauf der Prozesse beeinflusst – in Einzelarbeit hätten einige der untersuchten Schüler eventuell andere Heurismen verwendet. Auch sind Rückschlüsse auf Problembearbeitungsprozesse von einzeln arbeitenden Schülern nur eingeschränkt möglich; selbst wenn sich (begründet) vermuten lässt bzw. aus anderen Studien bekannt ist, dass Heurismen auch in Einzelarbeit beim Problemlösen helfen. Andere Methoden der Verbalisierung von Gedanken hätten vermutlich zu ähnlichen Schwierigkeiten geführt; unterbrechende Interviewfragen („Was machst Du gerade?") könnten beispielsweise den Blick der Schüler stärker auf Heurismen richten und damit als Intervention den Verlauf der Prozesse massiv beeinflussen (vgl. Abschnitt 4.1). Mit älteren Schülern – gerade mit sehr erfolgreichen Problemlösern – wäre es wünschenswert, zusätzlich nachträgliche Interviews („Stimulated Recall") durchzuführen, um mehr über die Momente zu erfahren, in denen Anzeichen für geistige Beweglichkeit gefunden wurden. Dies war im Rahmen dieser Untersuchung allerdings nicht möglich.

Eine weitere Einschränkung der vorliegenden Studie ist die Beschränkung auf Heurismen bzw. die Vernachlässigung anderer Einflussfaktoren auf das Problemlösen (vgl. Schoenfeld, 1985; 1992). Hier ist insbesondere die Metakognition bzw. Selbstregulation zu nennen, die eng mit dem Einsatz von Heurismen verknüpft ist (vgl. die Heurismen-Definitionen in Abschnitt 2.2): „the successful use of such strategies calls not only for ‚knowing' the strategies, but for good executive decision-making" (Schoenfeld, 1985, S. 95). Es stellt sich einerseits die Frage, ob bzw. inwiefern diese beiden Konzepte – Heurismen und Regulation – überhaupt voneinander getrennt werden können – auf theoretischer wie auf empirischer Ebene. Wie in vielen Bereichen ist eine eindeutige Trennung vermutlich unmöglich, wohingegen viele Handlungen von Problemlösern allerdings relativ eindeutig der einen oder anderen Gruppe von Aktivitäten zugeordnet werden können. Andererseits wäre es natürlich möglich, metakognitive Aktivitäten verstärkt in den Blick zu nehmen und mitzuerfassen; wofür bereits ausgearbeitete Kodiermanuale existieren. Eine Kodierung metakognitiver Aktivitäten wurde in dieser Studie bewusst nicht vorgenommen, diese Einschränkung ist ausschließlich der Fokussierung und dem Umfang des vorliegenden Beitrags geschuldet. Wünschenswert wäre auf jeden Fall eine Erweiterung der vorliegenden Untersuchung um metakognitive Aspekte.

Für einen Teil der vorliegenden Daten liegen entsprechende Auswertungen vor: In Rott (2014a) wurden die MALU-Prozesse auf den Aspekt Metakognition hin untersucht. Der Schwerpunkt dabei lag allerdings auf der Prozessregulation, die dortige Kodierung metakognitiver Aktivitäten lässt sich mit den hier vorliegenden Heurismen-Kodes leider nicht (ohne Weiteres) korrelieren.

5.5 Ausblick

In ihrem Handbuch-Kapitel zu Heurismen fordern Mousoulides und Sriraman (2014), dass sich die Forschung zum Thema Heurismen Fragen zuwendet, die sich stärker auf das Verständnis und das Erlernen von Heurismen beziehen:

> […] next research steps in the area of heuristics in problem solving need to develop operational definitions that enable the mathematics education community to answer more prescriptive, than descriptive, questions like the following: "What does it mean to 'understand' problem-solving heuristics and other tools?" "How, and in what ways, do these understandings develop and how can we foster this develop-

ment?" "How can we reliably observe, document, and measure such development?" (Mousoulides & Sriraman, 2014, S. 255)

Im vorliegenden Artikel wurde versucht, hierzu einen Beitrag zu leisten: (a) durch die Entwicklung eines Kodierverfahrens für Problemlöseprozesse, um den Einsatz von Heurismen reliabel und valide erfassen zu können, sowie (b) durch eine Untersuchung zum Zusammenhang von geistiger Beweglichkeit und Heurismen. Letzteres kann helfen nachzuvollziehen, wie erfolgreiche Problemlöser arbeiten und ihr „Erfolgsrezept" von weniger erfolgreichen Problemlösern nachgeahmt werden kann.

Für Anschlussstudien wäre es wünschenswert, die Anzahl an Schülern und Prozessen zu erweitern, um die Ergebnisse zu stützen. Die Herausforderung hierbei ist v. a. weitere Schüler mit ähnlichem Leistungspotential wie die hier untersuchten Wettbewerbsteilnehmer zu finden. Derzeit wird eine Studie ausgewertet, in der zwei Gruppen von mathematisch unterschiedlich starken Oberstufenschülern beim Problemlösen beobachtet wurden.

Wünschenswert wäre auch ein besserer Zugang zur geistigen Beweglichkeit, die bisher nur indirekt erfasst wurde. In der vorliegenden Studie kann nicht unterschieden werden zwischen „echter" geistiger Beweglichkeit und Heurismen, die vollständig im Kopf der Problemlöser, also für einen Beobachter unsichtbar, ausgeführt werden. Mögliche Zugänge zur Gedankenwelt der starken Problemlöser wären einerseits, sie mit schwächeren Problemlösern in Paaren zusammenzusetzen, um durch die Gespräche mehr über die im Kopf stattfindenden Prozesse zu erfahren. Hierfür müssten die schwächeren Problemlöser aber selbstbewusst genug sein, entsprechende Erklärungen einzufordern. Andererseits könnten die starken Problemlöser bewusst befragt werden zu den Situationen, in denen sie Ideen generiert haben, ohne dass zuvor heuristische Aktivität beobachtbar gewesen wäre. Für Nachfolgestudien sind daher nachgelagerte Interviews im Sinne eines Stimulated Recalls eingeplant, um potentielle Stellen im Prozess mit Bezug auf Heurismen und geistige Beweglichkeit mit den Probanden zu diskutieren und auf diese Weise mehr über dieses Phänomen zu lernen – sofern ein Unterschied zwischen geistiger Beweglichkeit und schnell im Kopf ausgeführten Heurismen überhaupt existiert und/oder empirisch zugänglich ist.

Auch über die Aufgabenauswahl könnte geistige Beweglichkeit deutlicher adressiert werden: In einer entsprechenden Studie könnten aufeinanderfolgende Aufgaben so ausgewählt sein, dass sie mit ähnlichen Verfahren lösbar sind (Analogieprinzip, vgl. Aßmus & Förster, 2015). Wenn nun die zweite Aufgabe mithilfe einer anderen Vorgehensweise schneller und eleganter lösbar ist, könnte das Nicht-Verwenden analoger Strategien ein Hinweis auf geistige Beweglichkeit sein.

Insgesamt zeigen die hier präsentierten Ergebnisse, dass bereits Kinder im Alter von 10 bis 12 Jahren dazu in der Lage sind, Heurismen beim Problemlösen anzuwenden, und dass sie hiervon profitieren. Eine Behandlung des Themas Problemlösen im Unterricht in Schulen – sei es im „normalen" problemorientierten Unterricht oder in speziellen Trainingsprogrammen (vgl. Bruder & Collet, 2011) – könnte und sollte diese Erkenntnis nutzen. Schon junge Schüler beherrschen implizit heuristische Vorgehensweisen, an die angeknüpft werden kann. Wünschenswert wären daher Studien, die auf der Basis entsprechenden Vorwissens den Erwerb heuristischer Fähigkeiten untersuchen.

Anmerkungen

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen verzichtet. Sofern nicht auf einzelne Personen eingegangen wird, gelten sämtliche Personenbezeichnungen für beide Geschlechter.

[2] Christina Collet heißt mittlerweile Bauer mit Nachnamen. Der Übersichtlichkeit halber wird im Text der Name verwendet, unter dem sie ihre Arbeiten veröffentlicht hat.

[3] Dies ist evtl. vergleichbar mit der Untersuchung von Metakognition durch Schoenfeld (1985, Kap. 9). Durch das Zusammenspiel von (ausbleibenden) Episodenwechseln und (wenig zufriedenstellenden) Resultaten konnte Schoenfeld etwas sichtbar machen, was nicht beobachtbar ist: fehlende Kontrolle im Prozess.

[4] Zufallskritische Maße wie Cohens Kappa bieten sich für die Berechnung der Interraterübereinstimmung hier nicht an, da es keine gute Möglichkeit gibt, das (1) zufällige Setzen von (beliebig vielen) Heurismen im Prozess zu modellieren, um damit die zufällige Übereinstimmung der Rater ermitteln zu können. Das sich anschließende Verfahren (2) zur Kategorisierung der gefundenen Heurismen ließe sich auf zufällige Übereinstimmung kontrollieren, dies wurde aus Gründen der Konsistenz beider Übereinstimmungsmaße allerdings nicht durchgeführt.

[5] Für die Schüler bis zum siebten Jahrgang ist die dritte Runde der Olympiade, der Landesentscheid, die Endrunde; für ältere Schüler gibt es zusätzlich einen Bundesentscheid.

[6] Auch wenn das *Messen* bei den „Zwei Bierdeckeln" in der betrachteten Altersgruppe kein zielführender Heurismus ist, lassen sich doch Aufgaben finden, bei denen dies der Fall ist: Beispielsweise kann in geometrischen Aufgaben, in denen die Länge einer Strecke oder die Größe eines Winkels ermittelt werden soll, die ungefähre Kenntnis dieser Größe bei der weiteren Bearbeitung helfen (man denke an „K10" aus der TIMS Studie).

Danksagung

Ich danke Markus Vogel für die Betreuung und den gutachtenden Personen für die kritische, vor allem aber stets konstruktive gemeinsame Arbeit an dem vorliegenden Artikel.

Zusatzmaterial

Im Anhang befinden sich Auszüge aus dem Heurismen-Kodiermanual sowie die Heurismen-Kodes der erfolgreichen Problemlöseprozesse.

Literatur

Aßmus, D. & Förster, F. (2015). ViStAD – Analoges Denken beim Problemlösen – Förderliche und hinderliche Bedingungen bei Analogieerkennung und Analogienutzung. In A. Kuzle & B. Rott (Hrsg.), *Problemlösen – gestalten und beforschen. Herbsttagung des GDM Arbeitskreises Problemlösen 2014* (S. 1–31). Münster: WTM-Verlag.

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. Heidelberg: Springer, 4. überarbeitete Auflage.

Bruder, R. (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In W. Herget & L. Flade (Hrsg.), *Lehren und Lernen nach TIMSS* (S. 69–78). Berlin: Volk & Wissen.

Bruder, R. (2003). Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms „SINUS" zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Kiel: IPN.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Chi, M. T. H. (2006). Two Approaches to the Study of Experts' Characteristics. In K. A. Ericsson, N. Charness, P. J. Feltovich & R. R. Hoffmann (Hrsg.), *The Cambridge handbook of expertise and expert performance* (S. 21–30.). Cambridge, UK, University Press.

Collet, C. (2009). Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation – Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen. Münster: Waxmann.

Dunbar, K. (1998). Problem Solving. In W. Bechtel & G. Graham (Hrsg.), *A companion to Cognitive Science* (S. 289–298). London, England: Blackwell.

Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer.

Gillard, E., Van Dooren, W., Schaeken, W. & Verschaffel, L. (2009). Proportional Reasoning as a Heuristic-Based Process – Time Constraint and Dual Task Considerations. *Experimental Psychology, 56*(2), 92–99.

Goos, M., & Galbraith, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 30*(3), 229–260.

Guilford, J. P. & Hoepfner, R. (1976). *Die Analyse der Intelligenz*. Weinheim und Basel: Beltz

Hasdorf, W. (1976). Erscheinungsbild und Entwicklung der Beweglichkeit des Denkens bei älteren Vorschulkindern. In J. Lompscher (Hrsg.), *Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit* (S. 13–75). Berlin: Volk & Wissen.

Hadamard, J. (1945). The psychology of invention in the mathematical field. Princeton: University Press.

Heinze, A. (2007). Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. *Journal für Mathematik-Didaktik, 28*(1), 3–30.

Herold-Blasius, R. & Rott, B. (2016). Using strategy keys as a tool to influence strategy behaviour – a qualitative study. In T. Fritzlar, D. Aßmus, K. Bräuning, A. Kuzle, & B. Rott (Hrsg.), *Problem solving in mathematics education. Proceedings of the 2015 joint conference of ProMath and the GDM working group on problem solving*. Münster: WTM-Verlag.

Kahneman, D. (2012). *Thinking – Fast and Slow*. London: Penguin Books.

Kantowski, E. L. (1974). *Processes involved in Mathematical Problem Solving*. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia. (University Microfilms)

Käpnick, F. (1998). Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Käpnick, F. (2006). Intuitives Erfassen, Vortasten und Lösen – ein besonderer Problembearbeitungsstil mathematisch begabter Grundschulkinder. In Institut für Kognitive Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 64 – 66). Hildesheim: Franzbecker.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solutions of word problems in mathematics: An exploratory study*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University. Dissertation Abstracts International, 1968, 28, 4380-A. (University Microfilms, 68–5, 442).

KMK. (2003). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Wolters Kluwer.

Koichu, B.; Berman, A. & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, 35, 99–139.

König, H. (1992). Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. *Der Mathematikunterricht*, *38*(3), 24–38.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: The first 25 years in JRME. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660–675.

Lompscher, J. (1972) (Hrsg.). Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten. Berlin: Volk & Wissen.

Lucas, J. F. (1974). The Teaching of Heuristic Problem-Solving Strategies in Elementary Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education, 5*(1), 36–46.

Mason, J.; Burton, L. & Stacey, K. (2006). *Mathematisch denken – Mathematik ist keine Hexerei*. München: Oldenbourg. 4., überarbeitete Auflage.

Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim und Basel: Beltz. 10. Auflage.

Metz-Göckel, H. (2011). Dual-Process-Theorien: Neuere Untersuchungen zu Intuition und Inkubation. *Gestalt Theory 22*(2), 201–214.

Mousoulides, M. & Sriraman, B. (2014). Heuristics in Mathematics Education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 253–255). Dordrecht: Springer.

Piaget, J. (1972). Theorien und Methoden der modernen Erziehung. Wien: Fritz Molden.

Pólya, G. & Szegö, G. (1925). *Aufgaben und Lehrsätze zur Analysis*. 2 Bände. Berlin: Springer.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.

Rott, B. (2014a). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*(1), 251–282.

Rott, B. (2014b). Rethinking Heuristics – Characterizations and Examples. In A. Ambrus & E. Vasarhelyi (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Education – Proceedings of the 15th ProMath Conference* (S. 176–192). Haxel nyomda, Hungary.

Rott, B. (2015). Rethinking Heuristics – Characterizations and Vignettes. *LUMAT* 3(1) 2015, 123–136.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 334 – 370). New York: MacMillan.

Schreblowski, S. & Hasselhorn, M. (2006). Selbstkontrollstrategien: Planen, Überwachen, Bewerten. In: H. Heinz & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien*. Göttingen: Hogrefe.

Schreiber, A. (2002). *Heuristik: Die Kunst des Problemlösens*. http://www.gefilde.de/g-mathematik/materialien/didmath-5.pdf

Schreiber, A. (2011). Begriffsbestimmungen – Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung. Berlin: Logos.

Schukajlow, S. & Leiss, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32*, 53–77.

Schwarz, W. (2006). Heuristische Strategien des Problemlösens – Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik. Münster: WTM-Verlag.

Sewerin, H. (1979). *Mathematische Schülerwettbewerbe*. München: Manz.

Stein, M. (1996). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, Jg. 17(2), 123–146.

Tietze, U.-P.; Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II – Band 1*. Braunschweig: Vieweg. 2. durchgesehene Auflage, 2000.

Tirosh, D. & Tsamir, P. (2014). Intuition in Mathematics Education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 325–330). Dordrecht: Springer.

van der Waerden, B. L. (1973). Einfall und Überlegung – Beiträge zur Psychologie des mathematischen Denkens. Basel: Birkhäuser. 3. verbesserte Auflage.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education, 15*(2), 154–164.

Winter, H. (1989). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht – Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig: Vieweg.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37–46.

Zimmermann, B. (2003). Mathematisches Problemlösen und Heuristik in einem Schulbuch. *MU – Der Mathematikunterricht, 1/2003*, 42–57.

Anschrift desVerfassers

Benjamin Rott
Universität zu Köln
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstr. 2
50931 Köln
benjamin.rott@uni-koeln.de

Anhang

Auszüge aus dem Heurismen-Kodiermanual. Jeder Heurismus besitzt eine Bezeichnung („Kategorie“), eine allgemeine Beschreibung und aufgabenspezifische Operationalisierungen. Die mit (*) markierten Kategorien wurden deduktiv aus der Literatur, die mit (+) markierten Kategorien wurden induktiv aus den Prozessen gewonnen.

Kategorie	**Beschreibung**	**Operationalisierung (Beispiele)**
Informative Figur (*)	Das Anfertigen einer Skizze, eines Diagramms oder eines Graphen.	*Zwei Bierdeckel* – das Zeichnen möglicher Konfigurationen der beiden Quadrate. *Marcos Zahlenreihe* – ein Graph, in dem Zahlen mit passenden Nachbarzahlen verbunden werden.
Hilfselemente (*)	Einfügen von Hilfselementen, die in der Aufgabenstellung nicht erwähnt wurden, beispielsweise das Zeichnen von Hilfslinien oder das Einführen einer Variablen.	*Zwei Bierdeckel* – Einzeichnen von Hilfslinien, z.B. Verlängerung von Quadratseiten oder Zerlegen der zu untersuchenden Fläche in Dreiecke.
Bezeichnungen einführen (*)	Elemente (z. B. geometrische Objekte) des Problems bezeichnen oder benennen oder auf andere Art kennzeichnen.	*Zwei Bierdeckel* – Eckpunkte und Strecken des Vierecks benennen, um besser mit ihnen Arbeiten / über sie sprechen zu können.
Tabelle (*)	Anlegen einer Tabelle, um gegebene Werte zu ordnen und um evtl. vorhandene (funktionale) Zusammenhänge sichtbar zu machen.	*Marcos Zahlenreihe* – Anlegen einer Tabelle [z.B. um die Kombinationsmöglichkeiten „durchzuspielen“, mit denen die Quadratzahlen in zwei Summanden zerlegt werden können].
Systematisierungshilfe (+)	Das Einführen ordnender Elemente, die bei der Ausführung und Überwachung einer Tätigkeit / eines Planes helfen.	*Marcos Zahlenreihe* – das Anfertigen einer Liste der Zahlen von 1 bis 15, in der abgestrichen werden kann, welche Zahlen schon verwendet wurden.
Messen (+)	Das Messen von Streckenlängen oder Winkeln in geometrischen Aufgaben.	*Zwei Bierdeckel* – Bestimmen der Länge von Seiten und Hilfslinien [z. B. um den Flächeninhalt zu bestimmen].

Tab. 3: Auszug aus dem Heurismen-Kodiermanual – heuristische Hilfsmittel

Kategorie	Beschreibung	Operationalisierung (Beispiele)
Spezialfall (*)	Betrachten von besonderen Fällen oder Werten, die angenommen werden können, z. B. Einsetzen von Werten wie 0 oder 1 in Terme oder Gleichungen.	*Zwei Bierdeckel* – Positionen der zwei Quadrate zueinander, in denen sofort ersichtlich ist, dass die gesuchte Fläche ¼ beträgt.
Zerlegen in Teilaufgaben (*)	Zerlegung der Aufgabe in (leichter zu lösende) Teilaufgaben. Dies können einzelne Aufgabenschritte sein oder tatsächliche (geometr.) Teilfiguren.	*Zwei Bierdeckel* – Unterteilung des gesuchten Vierecks in Dreiecke und/oder Rechtecke, deren Flächeninhalt bestimmt werden kann.
Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip (*)	Die Suche nach bekannten Elementen durch Zergliedern und ggf. akzentuiertes Zusammenfügen von Informationen.	*Zwei Bierdeckel* – Zerschneiden und Neuzusammensetzen der zu untersuchenden Fläche. *Marcos Zahlenreihe* – „Durchspielen“ der Kombinationsmöglichkeiten, Quadratzahlen in zwei Summanden zu zerlegen oder Auflistung aller möglichen Nachbarzahlen zu jeder Zahl zwischen 1 und 15.
Transformationsprinzip (*)	Das Übersetzen der Aufgabe in (eine andere) „mathematische Sprache“; das Finden einer (anderen) Modellierung; oder das Erweitern der Aufgabenstruktur.	*Zwei Bierdeckel* – enaktive Veranschaulichung der Situation mithilfe von Papierquadraten, die gegeneinander gedreht werden können. *Schachbrett* – der Übergang von der Geometrie in die Arithmetik, hier die Betrachtung von Teilern der Zahl 64 anstelle von Quadraten.
Symmetrieprinzip (*)	Symmetrische Eigenschaften im geometrischen oder algebraischen Sinn nutzen, z. B. die Achsensymmetrie einer Figur erkunden oder Variablen zyklisch vertauschen.	*Zwei Bierdeckel* – Drehsymmetrie der Quadrat-Konfiguration vermuten / damit argumentieren.

Tab. 4: Auszug aus dem Heurismen-Kodiermanual – heuristische Prinzipien

Kategorie	Beschreibung	Operationalisierung (Beispiele)
Suche nach Mustern (*)	Die Suche nach und das (subjektive) Erkennen von mathematischen Regelmäßigkeiten (geometrische Figuren, Zahlenfolgen) im Aufgabenkontext.	*Marcos Zahlenreihe* – Gezielte Suche nach Zahlen, die am Anfang oder Ende der Reihe stehen müssen, da sie nur einen Nachbarn besitzen.
Systematisches Probieren (*)	Testen von mehreren Elementen (Einsetzen von Werten / Betrachten von Fällen), mit dem Ziel sich der Lösung anzunähern. Systematisch wird es durch Techniken, die helfen, möglichst alle Elemente zu berücksichtigen (Auflistung aller möglichen Werte / Fallunterscheidung).	*Marcos Zahlenreihe* – Systematisches Anlegen von Zahlenreihen, wobei nach jedem (gescheiterten) Versuch mit einer anderen Zahl begonnen wird; z.B. mehrfach mit derselben Zahl beginnen oder die Startzahl systematisch variieren.
Backtracking (*)	Arbeiten nach dem „Versuch-Irrtum-Prinzip“: Es wird solange vorwärtsgearbeitet bzw. ausprobiert, bis es nicht weiter geht. Dann werden solange Schritte zurückgenommen, bis alternative Wege ausprobiert werden können.	*Marcos Zahlenreihe* – Anlegen einer Zahlenreihe, bis (z.B. nach 8 oder 9) keine weitere Zahl angelegt werden kann. Dann werden Zahlen gestrichen, bis die Reihe anders fortgesetzt werden kann (z.B. nach 1 oder 3).

Tab. 5: Auszug aus dem Heurismen-Kodiermanual – heuristische Strategien

Heurismen-Kodes (*kursiv*) und Zeitpunkt der Lösungsidee bzw. der Aktion, die zur Lösung geführt hat (**fett**), der erfolgreichen Prozesse.

Zwei Bierdeckel

Zeit	Vincent & Jonatan, MALU, korrekte und begründete Lösung
00:50	V, J: *informative Figur*
01:12	V: *Spezialfall* (parallel)
02:15	**V: „Ist immer gleich groß!“**
02:30	V: *Spezialfall* (nicht-parallel)
03:30	V: *Symmetrieprinzip* (vierfache Rotation)
03:36	J: *Hilfselemente*, *Bezeichnungen*, *Symmetrieprinzip* (Rotation)
07:08	Ende des Prozesses

Zeit	Barak & Pekalp, MALU, korrekte Lösung (nicht begründet)
01:52	B: *Messen* (Seitenlängen)
03:50	B: *Ähnliche Aufgabe* (kleine Quadrate einzeichnen)
04:22	P: *Messen* (Seitenlängen)
06:13	P: *Transformationsprinzip* (Drehung der Quadrate)
06:30	**P: „Ich weiß es, ist doch klar! […] ein Viertel.“**
08:55	P: *informative Figur*, *Transformationsprinzip* (Papierquadrat)
11:30	P: *Spezialfall* (parallel)
16:00	Ende des Prozesses

Zeit	Jana & Levin, MALU, korrekte Lösung (nicht begründet)
01:00	**J: „Oder sollen wir das in Brüchen schreiben? Das ist nämlich ein Viertel.“**
01:20	L: *Messen* (Seitenlängen)
01:50	L: *Hilfselemente* (Verlängerung der Seiten)
06:10	Ende des Prozesses

Zeit	Hannelore & Lucy, MALU, korrekte Lösung (nicht begründet)
01:03	L: *Messen* (Seitenlänge)
01:30	L: *Hilfselemente*, *Zerlegungsprinzip*
01:50	H: *Messen* (Seitenlänge)
03:55	H: *Bezeichnungen* (Eckpunkte A, B, C, D)
04:20	H, L: *Spezialfall* (parallel)
06:57	**L: „Ach, na klar. Stimmt, das ist genau so groß, wenn es hier bei der Ecke ist.“**
07:45	L: *informative Figur*, *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip*, *Spezialfall* (parallel)
11:30	Ende des Prozesses

Zeit	Marcel & Timm, MALU, korrekte und begründete Lösung
00:52	**M: „ein Viertel“**
02:00	T: *informative Figur*, *Spezialfall* (parallel)
02:40	T: *Spezialfall* (nicht-parallel)
03:30	Ende des Prozesses

Zeit	Florian & Tim, Wettbewerb, korrekte Lösung (nicht begründet)
00:50	F, T: *Ähnliche Aufgabe* (Flächenberechnung), *Messen* (Seitenlängen)
01:50	F, T: *Gleichung* (schriftliche Multiplikation der Seitenlängen)
04:30	T: *informative Figur* (zeichnet rechten Winkel)
05:35	T: „glaube ich, dass man das so verschieben kann, dass das auch die Mitte ist.“
	T: „Gleich groß, wenn man das jetzt auch zur Mitte zieht.“
	T: „Das müsste doch eigentlich gleich groß bleiben.
06:25	T: *Hilfselemente*; *Spezialfall* (parallel)
11:15	Ende des Prozesses

Zeit	Bernd & Tobi, Wettbewerb, korrekte Lösung (nicht begründet)
01:10	**B: „Wart mal, T, es müsste genau ein Viertel sein.“**
	B: „Weil, wenn man das jetzt so dort rüber schiebt, dass man dann auf genau vier Teile kommt.“
02:20	Ende des Prozesses

Zeit	Charlene & Sabine, Wettbewerb, korrekte und begründete Lösung
01:30	C, S: *Hilfselemente, Spezialfall* (parallel)
01:50	C, S: *Messen* (Seitenlängen)
02:30	C, S: *Messen* (Winkelgrößen)
06:40	C: *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* („Wenn man hier das Viertel raus schneidet, dann ist hier das-selbe zu viel wie da.“)
07:00	**C: „Also ist die Fläche von dem gesamten Bierdeckel ein Viertel.“**
09:30	Ende des Prozesses

Zeit	Tabea & Hannah, Wettbewerb, korrekte Lösung (nicht begründet)
00:50	H, T: *Messen* (Seitenlängen)
01:25	H, T: *Hilfselemente, Spezialfall* (parallel)
02:28	H, T: *Messen* (Winkelgrößen)
05:00	T: *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* („Wenn ich das hier wegnehme und da hinzeichne, dann ist es ein Quadrat.“)
06:00	H, T: *Gleichung* (schriftliche Multiplikation der Seitenlängen des kleinen Quadrats)
09:00	Ende des Prozesses

Marcos Zahlenreihe

Zeit	Jana & Ella, MALU, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)
04:25	J: *Systematisierungshilfe* (Zahlen 1-15)
04:30	E: *Systematisierungshilfe* (Quadratzahlen)
05:10	E: *Systematisierungshilfe* (Zahlen 1-15)
06:53	**J setzt die Reihe in die andere Richtung fort.**
11:03	Erst ergänzen sie rechts die Neun und sehen, dass es dann nicht weiter geht. Anschließend ändern sie am linken Rand die Zahlen und vervollständigen so die Reihe.
12:40	Ende des Prozesses

Zeit	Ekatrinna & Anja, MALU, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)
06:52	A: *Systematisierungshilfe* (Quadratzahlen)
09:52	A: *Systematisierungshilfe* (Zahlen 1-15)
19:10	A: *Systematisches Probieren* (1,3,6 // 1,3,13 // 1,15,10)
19:42	E: *Systematisierungshilfe* (Quadratzahlen)
38:31	A: *informative Figur* (Zahlenbaum mit Drei als Schnittstelle)
41:46	**A: „ah, ich hab's." A schreibt die fehlende Acht links vor ihre Zahlenreihe.**
42:00	Ende des Prozesses

Zeit	Birk & Janus, MALU, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)
03:33	B: *Systematisierungshilfe* (Zahlen 1-15)
17:28	J: *Backtracking*
21:55	B: *Systematisierungshilfe* (Quadratzahlen)
22:10	B: *Tabelle*, *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* (alle Kombinationen, Quadratzahlen zu erhalten)
25:00	**B: „Ich weiß schon das Ende oder wie es anfangen muss: Mit der Acht."**
31:20	Am Ende kommen beide – mehr oder weniger unabhängig voneinander – zu vollständigen Reihen (B hat mit Acht angefangen, J hat mit Neun angefangen).
33:00	Ende des Prozesses

Zeit	Marcel & Timm, MALU, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)
03:02	T: *Systematisierungshilfe* (Zahlen 1-15)
05:18	**M stellt Zahlen vom Beginn ans Ende und umgekehrt**
07:30	T: *Systematisierungshilfe* (Quadratzahlen)
07:56	T: *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* (Kombinationen, Quadratzahlen zu erhalten)
10:30	**T: „Die Neun muss unbedingt am Anfang stehen."**
10:34	M vervollständigt seine Reihe.
13:35	T vervollständigt seine Reihe – obwohl M schon fertig war, hat er unabhängig von dessen Lösung seine Idee weiterverfolgt: „Eigentlich ganz leicht, man muss nur die Sieben rauskriegen, äh nur die Neun, dass die nur durch eine einzige Zahl geht."
13:40	Ende des Prozesses

Zeit	**Robert & Lasse, Wettbewerb, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)**
00:30	L, R: *Systematisierungshilfe* (Zahlen 1-15)
00:40	L: *Systematisierungshilfe* (Quadratzahlen)
01:18	**L ergänzt seine Reihe nach links.**
04:15	Die fehlenden drei Zahlen werden mithilfe einer Kontrolle gefunden und ergänzt.
05:40	Ende des Prozesses

Zeit	**Florian & Tim, Wettbewerb, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)**
03:50	Die erste Reihe scheitert an einer Zahl.
05:32	**T ergänzt die letzte fehlende Zahl seiner Reihe nach links.**
06:15	Ende des Prozesses

Zeit	**Charlene & Sabine, Wettbewerb, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)**
01:05	C, S: *Systematisierungshilfe* (Zahlen von 1-15)
02:05	C: *Systematisierungshilfe* (Quadratzahlen)
07:15	C, S streichen Zahlen vorne in ihrer Reihe weg und stellen sie ans Ende
10:46	C: *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* (die Acht kann nur neben der Eins stehen)
11:35	S: *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* (die Neun kann nur neben der Sieben stehen)
12:00	**S: „Also acht ganz vorne und die Neun muss ganz hinten stehen.“ – C: „stimmt.“**
16:25	Ende des Prozesses

Zeit	**Tabea & Hannah, Wettbewerb, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)**
01:25	H, T: *Systematisierungshilfe* (Quadratzahlen)
02:55	H, T: *Systematisierungshilfe* (Zahlen von 1-15)
05:59	H, T: *Backtracking*
16:15	**H: *Suche nach Mustern* („Wir stecken, glaube ich, immer bei der Neun fest, oder? […] Dann lass uns doch mal mit der Neun anfangen.“)**
19:05	Ende des Prozesses

Zeit	**Bernd & Tobi, Wettbewerb, korrekte Lösung (keine Begründung notwendig)**
08:43	T: *Backtracking*
11:28	**B ergänzt die letzte fehlende Zahl seiner Reihe nach links.**
12:10	Ende des Prozesses